ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

SECTIO SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ACTA
SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XI.
FASC. 1—2.

SZEGED, 20. VIII. 1946.

UNIVERSITATE LITTERARUM SZEGEDIENSI ADIUVANTE
EDIDIT
SODALITAS AMICORUM UNIVERSITATIS

A SZEGEDI EGYETEM KÖZLEMÉNYEI

MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK

SZERKESZTIK:

KALMÁR LÁSZLÓ, KERÉKJÁRTÓ BÉLA †, SZŐKEFALVI NAGY BÉLA, SZŐKEFALVI NAGY GYULA, RÉDEI LÁSZLÓ és RIESZ FRIGYES

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

XI. KÖTET.

1—2. FÜZET

SZEGED, 1946. augusztus 20.

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TÁMOGATÁSÁVAL
KIADJA
AZ EGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

SECTIO SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

REDIGUNT:

L. KALMÁR, B. de SZ. NAGY, GY. de SZ. NAGY,
L. RÉDEI et F. RIESZ

ACTA

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XI.

1946—1948.

SZEGED.

MINISTRO RELIGIONIS PUBLICAEQUE INSTRUCTIONIS ADIUVANTE
EDIDIT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI EGYETEM KÖZLEMÉNYEI

MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK

ACTA
SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

11. KÖTET.

1946—1948.

SZEGED.

A VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISZTER TÁMOGATÁSÁVAL
KIADJA
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX — TARTALOM.

Tomus XI. — 1946/48. — XI. kötet.

BIBLIOGRAPHIE.

Szeged Városi Nyomda és Könyvkiadó Rt. Felelős Kiss István igazgató

BÉLA DE KERÉKJÁRTÓ †

Le 27 mai 1946 est mort, à l'âge de 48 ans, BÉLA DE KERÉKJÁRTÓ, professeur à l'Université de Szeged, puis à celle de Budapest. Par sa mort inattendue, le monde scientifique hongrois a subi une perte très sensible; on n'a pas seulement perdu un excellent savant, mais aussi un maître aux larges horizons et un organisateur infatigable. De l'année 1933 jusqu' à sa mort, il prit une part active à la rédaction de nos *Acta*.

Après avoir passé sa Thèse à l'Université de Budapest, KERÉKJÁRTÓ partit comme boursier pour l'étranger. Sur l'invitation de l'Université de Göttingen, pendant le semestre d'été de 1922, il fit un cours sur la topologie, et pendant le semestre suivant, un cours intitulé „Mathematische Betrachtungen zur Kosmologie". C'est son premier cours qu'il a élaboré dans son livre *Vorlesungen über Topologie,* reçu dans la série „Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften"; cet ouvrage, le premier de son espèce, a inspiré beaucoup de recherches ultérieures dans cette jeune branche de la Géométrie. L'année suivante (1923) il a fait des cours à l'Université de Barcelone, intitulés „Geometria y teoria de funciones". Les années 1923/24 et 1924/25 passées à Princeton (États-Unis) comme „lecturer" lui ont donné l'occasion de prononcer des cours sur la topologie et sur les groupes continus. A l'invitation de la Sorbonne, il revient des États-Unis à Paris. Par ses „Leçons sur la topologie et ses applications", il s'acquiert le respect des géomètres français les plus distingués. Ses rapports avec ses collègues étrangers n'ont fait que s'approfondir au cours de sa vie.

Revenu en Hongrie en 1926, il est nommé professeur de Géométrie d'abord à l'Université de Szeged, puis (en 1938) à celle de Budapest. Mais ses relations avec le monde mathématique ne cessent pas, il est invité souvent par des Universités et des Académies. Dans ses conférences aux congrès internationaux, il s'occupe toujours des problèmes les plus actuels de la topologie.

Ses résultats scientifiques les plus importants se rapportent à la topologie „classique" de transformations, inaugurée par POINCARÉ et BROUWER, et à la théorie des groupes continus.

Après que le problème de l'homéomorphie des surfaces eut été résolu (et cela pour les surfaces *ouvertes* justement par KERÉKJÁRTÓ), la possibilité s'ouvrit d'étudier d'une manière plus approfondie la structure des transformations de ces surfaces. Lors du début des recherches de KERÉKJÁRTÓ, on possédait deux résultats classiques dans ce domaine, le „dernier théorème géométrique de POINCARÉ", démontré d'abord par G. D. BIRKHOFF, et le théorème de translation de BROUWER. KERÉKJÁRTÓ indiquait déjà dans son livre la relation très étroite de ces deux théorèmes; plus tard, dans un article de nos *Acta* en 1928, il a réussi même démontrer ces deux théorèmes par une construction commune. Cette démonstration simultanée des deux théorèmes relie des chapitres éloignés des Mathématiques; en effet, tandis que le premier théorème a joué un rôle important dans les recherches de POINCARÉ sur la dynamique, le second théorème a été appliqué par BROUWER dans la théorie géométrique des groupes continus. Aussi dans son oeuvre ultérieure il s'occupe avec préférence de ceux des problèmes de topologie qui sont en liaison serrée avec des applications, ou qui s'imposent par l'approfondissement de problèmes de la géométrie classique, de la théorie des fonctions, etc.

La fameuse conférence de HILBERT au Congrès de Paris a été de grande importance pour le développement de la topologie; elle a contribué d'une manière essentielle notamment au vif développement de la théorie des groupes continus. Les résultats les plus beaux de cette théorie, dans le cas de la dimension 2, sont dûs à KERÉKJÁRTÓ. Qu'il suffise de rappeler la caractérisation topologique des représentations homographiques de la sphère et du groupe des affinités du plan, les fondements de la géométrie projective complexe ou encore ses théorèmes sur les groupes transitifs de la droite. C'est dans cet ordre d'idées que rentrent aussi ses résultats sur les fondements topologiques des géométries euclidienne et hyperbolique dans trois dimensions.

Aussi a-t-il étudié de plus près les transformations regulières des surfaces, problème intimement lié à ceux que nous venons de mentionner, et qui admet aussi des applications intéressantes à la dynamique.

Sa haute compétence en cette nouvelle branche de la géométrie, la topologie, a été reconnue entre autres par le fait qu'on a lui confié la rédaction du chapitre sur la Topologie dans l'*Encyclopédie Française*.

Kerékjártó choisissait toujours avec discernement l'objet de ses cours universitaires; il a initié ses élèves à de nombreux chapitres importants de la géométrie.

C'est un sens délicat de systématisation qui se manifeste aussi dans son dernier travail, livre de plus de 600 pages, en hongrois, traitant la géométrie projective à partir de ses éléments jusqu'aux problèmes les plus modernes, et qui, malgré la richesse de la matière contenue et la solidité de son exposé, est toujours d'une lecture agréable.

Ce livre était d'ailleurs le second dans une série projetée de cinq volumes. Dans le premier, paru en 1937, il avait donné une fondation axiomatique sans lacune de la géométrie euclidienne métrique. Les volumes suivants auraient dû traiter chacun d'un autre chapitre de la géométrie. C'est une perte très sensible pour les mathématiques que ces volumes n'aient pu être achevés.

La mort a ravi Béla de Kerékjártó au moment où il était encore dans la plénitude de sa force créatrice. Nous ne connaissons pas tous les plans qu'il avait formés, mais assurément sa mort a privé le monde mathématique d'ouvrages actuellement irremplaçables.

La rédaction.

ERRATA

p. 130, *lignes* 22—24*: la phrase* "Les triangles... du second." *est à lire après l'alinéa suivant. Il faut lire* "du" *au lieu de* "des" *(ligne* 23*) et* "au" *au lieu de* "an" *(ligne* 24*).*

p. 167, *ligne* 6*: lire* "denote" *au lieu de* "deno".

p. 191. *Il faut intercaler après le titre du livre analysé, sa traduction:*
[Gyula Szőkefalvi Nagy, The theory of geometrical constructions, (Universitas Francisco-Josephina, Acta Scientiarum Mathematicarum et Naturalium, fasc. 18), VIII + 87 pages, Kolozsvár, 1943.]

p. 192, *ligne* 3: *lire* "compte" *au lieu de* "complete" *et à intercaler aux lignes* 10—11*:* "neutron est une particule hypothétique introduite".

Über das Haarsche Lemma in der Variationsrechnung und seine Anwendungen.

Von A. Sólyi in Budapest.

Einleitung.

Die Untersuchung der ersten Variation in der Theorie der mehrdimensionalen Variationsprobleme führt zu folgender Frage. Wie sollen die Funktionen $g, v_1, v_2, \ldots, v_n$ beschaffen sein und was für Zusammenhänge sollen zwischen ihnen gelten, damit die folgende Bedingung erfüllt sei: Es soll in einem n-dimensionalen Gebiet B

$$K(\zeta) = \int_B \left(g\zeta + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \ldots + v_n \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} \right) dV = 0 \tag{1}$$

$$(dV = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n)$$

gelten für alle einmal stetig differenzierbaren ζ, die am Rande von B verschwinden. Es ergibt sich nämlich mit den üblichen Methoden für das Variationsproblem

$$I = \int_B f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, dV = \text{Extremum} \tag{2}$$

$$\left(p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha},\ \alpha = 1, 2, \ldots, n \right)$$

(wo die Werte von z am Rande von B gegeben sind), als erste notwendige Bedingung des Extremums, daß die Relation

$$I'(\zeta) = \int_B \left(\frac{\partial f}{\partial z}\zeta + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} \right) dV = 0 \tag{3}$$

für alle, am Rande verschwindenden ζ gelte. Man pflegt das obige Integral die erste Variation des Integrals I (oder auch diejenige des Problems (2)) nennen. Die Bedingung (3) kann also auch so ausgedrückt werden, daß die erste Variation des Problems für alle, am Rande verschwindenden ζ verschwinden soll. Ist diese Bedingung erfüllt, so heißt z eine Extremale des Problems.

B e m e r k u n g. Es genügt uns auf den Fall zu beschränken, wo es um ein Minimum handelt. (Der Fall eines Maximums kann auf diesen durch eine Multiplikation mit -1 zurückgeführt werden.)

In der älteren Behandlung wurden die Bedingungen (1) und (3) mit Hilfe des Greenschen Satzes (im Falle $n=1$ mit einer partiellen Integration) so umgeformt, daß die Ableitungen von ζ darin nicht mehr vorkommen. Dann wurde von folgendem einfachen Satz Gebrauch gemacht: Wenn eine Funktion auf jeder, am Rande verschwindenden Funktion ζ orthogonal ist, dann ist sie identisch gleich 0. So ergibt sich die Euler—Lagrangesche Differentialgleichung:

$$\sum_{(\alpha)} \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Bei der Anwendung des Greenschen Satzes muß man voraussetzen, daß alle v_α $\left(\text{bzw. } \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)$ nach sämtlichen x_β einmal stetig differenzierbar sind. Diese Voraussetzung kann — außer den für die Funktion f bezüglichen entsprechenden Annahmen — am einfachsten dadurch gesichert werden, daß man die Extremale z zweimal stetig differenzierbar annimmt. Diese Annahme ist aber unnötig stark, da nur die ersten Ableitungen im Problem vorkommen. Sie erschwert außerdem die Existenzbeweise für die Lösungen der Variationsprobleme und der damit verknüpften partiellen Differentialgleichungen und die Untersuchung ihrer analytischen Natur.

Die Annahme der Existenz der zweiten Ableitung hat DU BOIS-REYMOND in dem einfachsten, eindimensionalen Falle dadurch eliminiert, daß er anstatt des ζ' enthaltenden Gliedes das ζ enthaltende Glied partiell integrierte und die weitere Betrachtung auf das folgende Lemma aufbaute:

Es sei $u(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall (a, b) stetig. Gilt die Relation

$$\int_a^b u\zeta'\,dx = 0$$

für jede, in a und b verschwindende und im Intervall stetig differenzierbare Funktion $\zeta(x)$, dann ist u eine Konstante. Dieses Lemma führt in dem eindimensionalen Falle ebenfalls zu der Euler—Lagrangeschen Differentialgleichung, aber in der verschärften Form, daß die Existenz der in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitung $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)$ nicht vorausgesetzt, sondern bewiesen wird. Wenn außerdem $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0$

vorausgesetzt wird, dann ist z zweimal (sogar beliebig vielmal) differenzierbar. In den mehrdimensionalen Fällen kann man jedoch ein ähnliches Resultat nicht erwarten. HADAMARD[1]) hat nämlich an einem einfachen Beispiel gezeigt, daß die zweiten Ableitungen der Extremale nicht notwendig existieren.

ALFRED HAAR ist es dennoch gelungen, die du Bois-Reymondsche Methode auf mehrdimensionale Probleme zu übertragen. Er baute seine Untersuchungen auf eine Verallgemeinerung des du Bois-Reymondschen Lemmas auf, die im zweidimensionalen Falle folgendermaßen lautet:[2])

Es sei B ein Gebiet in der Ebene, g, u, v seien in diesem Gebiet stetige Funktionen. Wenn die Relation

$$\iint_B \left(g\zeta + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

für jede, am Rande von B verschwindende, in B einmal stetig differenzierbare Funktion ζ erfüllt ist, dann gibt es drei Funktionen G, U, V so, daß

$$g = -G_{xy},\quad u = U_y,\quad v = V_x,\quad G + U + V = 0. \tag{4}$$

Die Relation (4) kann auch in folgender Form ausgedrückt werden[3]): Es gilt für jedes, im Inneren von B liegendes Gebiet T, das durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve S berandet ist, die Relation

$$\int_T g\,dx\,dy = \int_S (u\,dy - v\,dx).$$

Wir geben in § 1 dieser Arbeit für das Haarsche Lemma in dieser Integralform einen neuen Beweis. Der Vorteil dieses Beweises ist, daß

---

1) J. HADAMARD, Sur les variations des integrales doubles, *Comptes Rendus Paris,* **144** (1907), S. 1092—1093.

2) A. HAAR, A kettős integrálok variációjáról, *Math. és Természettudományi Értesitő,* **35** (1917), S. 1—19; A. HAAR, Über das Plateausche Problem, *Math. Annalen,* **97** (1927), S. 124—158. HAAR hat in der zweiten angeführten Abhandlung das Lemma auch für den Fall ausgesprochen, wo g, u, v beschränkte und meßbare Funktion sind.

3) Die so gewonnene Integralform des Haarschen Lemmas kommt für den 2-, bzw. 3-dimensionalen Fall in Haars zuletzt angeführten Abhandlung und in folgender Arbeit vor: A. Szücs, Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stookes, *diese Acta,* 3 (1927), S. 81—95. Hier kommt nur der spezielle Fall $g = 0$ vor; der allgemeine Fall kann auf diesen durch Anwendung des Greenschen Satzes leicht zurückgeführt werden. Siehe noch M. CORAL, On the Necessary Conditions for the Minimum of a Double Integral, *Duke Math. Journal,* **3** (1937), S. 585—592. Die Integralform kommt übrigens im 2- und 3-dimensionalen Falle als ein Zwischenresultat zur Ableitung des Differentialgleichungssystems z. B. in HAARS bzw. Szücs's angeführten Abhandlungen vor. Es ist also in ihrer Ableitung implizite der Satz enthalten, daß aus der Integralform die Differentialgleichungssystem-Form folgt.

er gleichzeitig in beliebig vielen Dimensionen ausgeführt werden kann. Dagegen ist die Methode, womit HAAR sein Lemma für den mehrdimensionalen Fall bewiesen hat[4]), rekursiver Natur: sie führt den n-dimensionalen Fall auf den $n-1$-dimensionalen zurück. (Z. B. den 2-dimensionalen auf das Du Bois-Reymondsche Lemma, während die anzuwendende Methode auch für dieses einen neuen Beweis liefert.) Wir geben auch einen einfacheren Beweis für die — von HAAR und SCHAUDER bewiesene[5]) — Umkehrung des Haarschen Lemmas.

HAAR hat sein Lemma auf solche Probleme angewendet, wo die Begrenzung des Integrationsgebietes B fest ist (also der Typ (2) vorliegt). So konnte er die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation anstatt der Euler—Lagrangeschen Gleichung durch ein solches Gleichungssystem ausdrücken, in welchem nur die ersten Ableitungen der Extremale vorkommen. Wir werden dieses System das Haarsche Differentialgleichungssystem des Problems (2) nennen. Das Haarsche Gleichungssystem in dem 2-dimensionalen Fall lautet, wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x};\ G+U+V=0.$$

Die Probleme mit einer variierender Begrenzung hat GERGELY[6]) mit Hilfe des Haarschen Lemmas behandelt. Wir werden das Gergelysche Ergebnis für den sogenannten zylindrischen Fall wesentlich einfacher ableiten.

In § 2 wenden wir das Haarsche Lemma in der Jacobischen Theorie der zweiten Variation an.

Die klassischen Methoden ergeben, daß für das Vorhandensein eines Minimums in dem Variationsproblem (2) außer dem Verschwinden der ersten Variation auch die folgende Bedingung erfüllt werden soll:

$$(5)\qquad I''(\zeta)=\int\limits_B\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2+2\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p_\alpha}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\beta}\right)dV\geqq 0$$

für alle zulässigen (das heißt: am Rande von B verschwindenden und in B einmal stetig differenzierbaren) ζ. Das Integral an der linken Seite werden wir die zweite Variation des Integrals I (oder auch diejenige des Problems (2)) nennen. Die Bedingung (5) sagt also folgendes aus: die

[4]) A. HAAR, Zur Variationsrechnung, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg*, **8** (1931), S. 1—27.

[5]) J. SCHAUDER, Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung, *diese Acta*, **4** (1928—29), S. 38—50.

[6]) F. GERGELY, Über die Variation von Doppelintegralen mit einer variierender Begrenzung, *diese Acta*, **2** (1924—26), S. 139—146.

zweite Variation soll für alle zulässigen ζ nicht negativ werden. Dazu ist aber notwendig, wie bekannt ist, daß die quadratische Form

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} y_\alpha y_\beta$$

keine negativen Werte annimmt, also positiv definit, oder semidefinit ist. *(Legendresche Bedingung.)* Wir nennen Q die charakteristische Form des Problems. In dem ersten Falle, also, wenn die charakteristische Form positiv definit für alle, in B liegenden Wertsysteme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist, sagen wir, daß die schärfere Legendresche Bedingung erfüllt ist und nennen das Problem (2) bezüglich der Extremalen z elliptisch. Wir werden uns im folgenden nur auf elliptische Probleme beschränken.

Die klassische Variationstheorie ordnet nun zu jeder zweimal differenzierbaren Extremalen z zwecks weiterer Untersuchung der zweiten Variation folgende, sogenannte akzessorische (Jacobische) Differentialgleichung zu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{d}{dx_\alpha} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} u \right),$$

wo u die unbekannte Funktion ist. Den zwischen dieser partiellen Differentialgleichung und dem Vorzeichen der zweiten Variation bestehenden Zusammenhang drücken folgende Sätze aus: 1. *Wenn die akzessorische Differentialgleichung eine solche Lösung hat, welche weder im Inneren, noch auf dem Rande von B verschwindet, so ist die zweite Variation für alle zulässigen ζ positiv.* 2. *Wenn die akzessorische Differentialgleichung eine solche nicht triviale Lösung hat, welche an einer, im Inneren von B liegenden, glatten, geschlossenen Fläche S verschwindet, dann gibt es ein solches zulässiges ζ, für welches die zweite Variation negativ wird. Es ist ferner bekannt, daß, wenn $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ für alle Werte des Parameters t Extremale des Problems* (2) *ist, dann ist $u = \frac{\partial z}{\partial t}$ eine Lösung der akzessorischen Differentialgleichung.*

In der akzessorischen Differentialgleichung kommen auch die zweiten Ableitungen der Extremalen vor. HAAR hat aber die obigen Sätze auch auf den Fall übertragen, wo nur einmalige stetige Differenzierbarkeit der Extremalen angenommen wird. (Siehe [4])) Zu diesem Zwecke hat er die akzessorische Differentialgleichung durch ein Differentialgleichungssystem ersetzt, in welchem nur die ersten Ableitungen von z vorkommen. Formal entsteht dieses System aus dem Haarschen Differentialgleichungssystem durch dasselbe Verfahren (Polarisieren), wie die akzessorische Gleichung aus der Euler—Lagrangeschen. Wir leiten die Haarschen Ergebnisse im § 2 dadurch einfacher ab, daß wir anstatt des akzessorischen Differentialgleichungssystems das sogenannte akzessorische Problem zu Grunde legen[7]) und die (verallgemeinerten) Haarschen Relationen dieses Problems anwenden.

Wir führen zur Vereinfachung der Schreibweise vektorielle Bezeichnungen ein; wir schreiben z. B. die Gleichung (1) folgendermaßen:

$$\int_B (g\zeta + \mathfrak{v} \operatorname{grad} \zeta)\, dV = 0,$$

wobei $\mathfrak{v}$ den Vektor $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, grad ζ den Vektor $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right)$ bedeutet. Wir machen außerdem von folgender, im Tensorkalkül üblicher Schreibweise Gebrauch: Wenn ein, durch eine griechische Buchstabe bezeichneter Index in einem Gliede zweimal vorkommt, dann soll für die Werte 1, 2, ..., n von diesem Index summiert werden. Man schreibt z. B. die charakteristische Form kürzer so:

$$Q(\mathfrak{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha\, \partial p_\beta} y_\alpha y_\beta; \qquad \mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Diese Bezeichnungen ermöglichen uns die ganze Betrachtung in n Dimensionen vollzuführen, ohne, daß unsere Formeln und Rechnungen komplizierter werden, als diejenigen im 2-dimensionalen Fall.

§ 1. Das Haarsche Lemma und seine Korollare.

1. Das Haarsche Lemma. Satz. *Es sei B ein n-dimensionales Gebiet.* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *und* $\mathfrak{v}(x_1, \ldots, x_n)$ *sei eine in B stetige skalare, bzw. n-dimensionale Vektorfunktion. Wenn*

$$K(\zeta) = \int_B (\zeta g + \mathfrak{v} \operatorname{grad} \zeta)\, dV = 0 \tag{7}$$

ist für alle, am Rande des Gebietes B verschwindenden, stetig differenzierbaren ζ, *dann gilt*

$$\int_T g\, dV = \int_S \mathfrak{v}_\nu\, dS \tag{8}$$

für jedes, im Inneren von B liegende Gebiet T, welches von einer glatten (also mit einer stetigen Normalen versehenen) doppelpunktlosen n—1-dimensionalen Fläche S begrenzt wird[8]). *(Hier bedeutet* $\mathfrak{v}_\nu$ *die äußere normale*

[7]) Dieses akzessorische Variationsproblem kommt auch in folgender Arbeit vor: W. T. Reid, The Jacobi Condition for the Double Integral problem of the Calculus of Variations, *Duke Math. Journal,* 5 (1939), S. 856—870. Reid überträgt einige Sätze der Jacobischen Theorie auf den Fall, daß die zweimalige Differenzierbarkeit der Extremalen nicht angenommen wird; seine Untersuchungen sind aber komplizierter als die unseren.

[8]) Wenn der Rand von B eine glatte Fläche ist, dann kann T mit B zusammenfallen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die späteren Verallgemeinerung des Haarschen Lemmas.

Komponente von $\mathfrak{v}$.) Das Lemma gilt auch im Falle, daß g und $\mathfrak{v}$ nur beschränkt und meßbar angenommen werden. Dann wird aber der obige Zusammenhang nicht für alle, sondern nur für — in einem gewissen Sinne — fast alle S gelten. Wir verstehen darunter folgendes: wenn eine Schar S_λ glatter, geschlossener Flächen gegeben ist, welche in ihrer Gesamtheit den Raum einmal schlicht ausfüllen (z. B. eine konzentrische Kugelschar), dann gilt die Gleichung (8) *für fast alle S_λ und die von ihnen begrenzten T_λ.*

Um den Satz kürzer aussprechen zu können, führen wir folgende Ausdrucksweise ein: Wenn (7) für alle, am Rande von B verschwindenden, stetig differenzierbaren ζ erfüllt wird, dann sagen wir, daß die erste Variation des Paares $(g, \mathfrak{v})$ gleich 0 ist und nennen das Paar $(g, \mathfrak{v})$ ein Variationspaar[9]. Wenn (8) für fast alle, im Inneren von B liegenden glatten geschlossenen Flächen S und für die von denselben begrenzten Bereiche T erfüllt ist, dann sagen wir, daß für das Paar $(g, \mathfrak{v})$ die Haarschen Relationen in B erfüllt sind, bzw. daß $(g, \mathfrak{v})$ in B ein Haarsches Paar ist. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, dann lassen wir die Benennung des Bereiches weg. Mit dieser Definition können wir das Haarsche Lemma folgendermaßen abfassen:

Jedes beschränkte und meßbare Variationspaar ist ein Haarsches Paar.

Beweis. Wir beweisen das Lemma vorerst für den einfachsten Fall, daß $\mathfrak{v}$ stetig differenzierbar ist.

Es folgt aus dem Verschwinden der ersten Variation für jede am Rande des Gebietes T verschwindende ζ die Gleichheit:

$$\int_T (\zeta g + \mathfrak{v} \operatorname{grad} \zeta)\, dV = 0.$$

Es folgt daraus infolge des Gaußschen Divergenzsatzes, daß

$$\int_T \zeta(\operatorname{div} \mathfrak{v} - g)\, dV = \int_S \zeta \mathfrak{v}_\nu\, dS = 0.$$

Da ζ — von den oben erwähnten Beschränkungen abgesehen — willkürlich ist, folgt aus dem klassischen Satze der Variationsrechnung, daß

$$g = \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Man bekommt daraus mit Hilfe des Gaußschen Satzes das Haarsche

[9]) Z. B., wenn z eine Extremale des Problems (2) ist, dann ist $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S}\right)$ ein Variationspaar, wo der Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right)$$

durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet wurde.

Lemma:

$$\int_T g\,dV = \int_S \mathfrak{v}_\nu\,dS.$$

Wenn $\mathfrak{v}$ nur stetig angenommen wird, dann führen wir zuerst ein stetig differenzierbares Hilfspaar $(G, \mathfrak{V})$ durch folgende Definition ein:

$$G(x, u) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} g(x+u)\,du$$

$$\mathfrak{V}(x, u) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \mathfrak{v}(x+u)\,du.$$

Wir haben in der Formel der Kürze halber $G(x, u)$, $g(x+u)$, du statt $G(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$, $g(x_1+u_1, \ldots, x_n+u_n)$ bzw. $du_1\,du_2 \ldots du_n$ geschrieben. Damit diese Definition immer einen Sinn hat, nehmen wir an, daß g und $\mathfrak{v}$ auch außerhalb von B stetig sind. Dies ist keine Beschränkung. Wenn es nämlich anders wäre, dann könnten wir $(g, \mathfrak{v})$ stetig fortsetzen.

Wir behaupten, daß wenn $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 \leqq d$, wobei d eine willkürliche positive Zahl bedeutet, dann verschwindet die erste Variation des Paares $(G, \mathfrak{V})$ in jedem solchen B_1, welches im Inneren von B von dessen Begrenzung mindestens d weit entfernt liegt. Der Beweis dieser Behauptung ist folgendes. Es ist leicht zu sehen, daß es aus dem Verschwinden der ersten Variation von $(g(x), \mathfrak{v}(x))$ folgt, daß auch die erste Variation von $(g(x+u), \mathfrak{v}(x+u))$ verschwindet, d. h.

$$\int_{B_1} [g(x+u)\,\zeta(x) + \mathfrak{v}(x+u)\operatorname{grad}\zeta]\,dV = 0$$

für jedes, in B_1 zulässige ζ[10]. Wir integrieren diese Gleichung nacheinander nach $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Dann bekommen wir, daß auch die erste Variation von $(G(x, u), \mathfrak{V}(x, u))$ in B_1 verschwindet. Es ist aber hier $\mathfrak{V}(x, u)$ für jedes x stetig differenzierbar. Dies kann so eingesehen werden, daß man $\mathfrak{V}$ durch Einführung neuer Integrationsveränderlichen auf die Form

$$\mathfrak{V}(x, u) = \int_{x_1}^{x_1+u_1} \cdots \int_{x_n}^{x_n+u_n} \mathfrak{v}(y)\,dy$$

bringt. Wir haben aber für den Fall stetig differenzierbarer $\mathfrak{V}$ die Gültigkeit des Haarschen Lemmas bewiesen. Es gilt infolgedessen

$$\int_T G(x, u)\,dV = \int_S \mathfrak{V}_\nu(x, u)\,dS$$

[10]) Die in B_1 zulässigen ζ sind in B nicht unbedingt zulässig. Man sollte dazu voraussetzen, daß die Differenzenquotienten von ζ am Rande von B_1 verschwinden sollen. Von dieser Beschränkung kann man sich aber mit Hilfe der Methode der „Abrundung der Ecken" frei machen.

für $T \subset B_1$. Wir differenzieren unter dem Integralzeichen nacheinander nach $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und setzen $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. Man bekommt so

$$\int_T g(x)\, dV = \int_S \mathfrak{v}_\nu(x)\, dS$$

für jedes, im Inneren von B_1 liegende, von einer glatten Fläche S begrenzte T. Wir lassen d gegen 0 konvergieren. So bekommt man den Satz, daß g und $\mathfrak{v}$ in B ein Haarsches Paar bilden.

Wir behandeln nun den Fall, in welchem g und $\mathfrak{v}$ nur beschränkt und meßbar angenommen werden. Die vorige Beweisführung wird sich nur so umgestalten, daß wir außer dem Hilfspaare $(G, \mathfrak{V})$ noch das durch die folgenden Gleichungen definierte Hilfspaar $(G_1, \mathfrak{V}_1)$ einführen:

$$G_1(x, u) = \int_0^{u_1} \ldots \int_0^{u_n} G(x, u)\, du,$$

$$\mathfrak{V}_1(x, u) = \int_0^{u_1} \ldots \int_0^{u_n} \mathfrak{V}(x, u)\, du.$$

Die Schlußfolgerung wird so umgeändert, daß die Haarschen Relationen nur für fast alle Flächen gültig sind, da das Differenzieren unter dem Integralzeichen nur für fast alle Flächen erlaubt ist.

2. Die Umkehrung des Haarschen Lemmas. Satz. *Jedes beschränkte und meßbare Haarsche Paar ist ein Variationspaar.*

Beweis. Es seien zuerst g und $\mathfrak{v}$ stetig differenzierbar angenommen. Dann schreiben wir die Haarschen Relationen für Kugeln mit dem Mittelpunkt x auf und lassen den Halbmesser der Kugeln gegen 0 konvergieren. So ergibt sich:

$$g = \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Das Verschwinden der ersten Variation folgt daraus trivial infolge des Gaußschen Satzes. Wenn g und $\mathfrak{v}$ nur beschränkt und meßbar angenommen werden, dann zeigt man zuerst durch eine Integration (ähnlich, wie bei dem Beweis des Haarschen Lemmas), daß die Haarschen Relationen auch für $(G, \mathfrak{V})$, bzw. $(G_1, \mathfrak{V}_1)$ erfüllt sind. Es folgt aber infolge der früher bewiesenen, daß auch die erste Variation von $(G_1, \mathfrak{V}_1)$ verschwindet. Daraus folgt durch ein Differenzieren der Satz für den allgemeinen Fall. (Das Differenzieren unter dem Integralzeichen ist erlaubt, da in der Formel nur Volumenintegrale vorkommen, aber keine Flächenintegrale.)

3. Die Verallgemeinerung des Haarschen Lemmas. *Wenn die erste Variation eines beschränkten und meßbaren Paares $(g, \mathfrak{v})$ in einem Gebiet B verschwindet, dann gilt für jede, einer Lipschitzschen Bedingung* *genügende Funktion* $\varphi(x)$ *die Relation*

$$K(\varphi) = \int_T (g\varphi + \mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi)\,dV = \int_S \varphi\,\mathfrak{v}_\nu\,dS$$

für fast alle in B *liegenden geschlossenen glatten Flächen* S *und die von durch sie begrenzten Bereiche* T. (Im weiteren wird $\varphi(x)$ Parameterfunktion genannt). *Mit anderen Worten:*

$$(g\varphi + \mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi\,\mathfrak{v})$$

ist in B *ein Haarsches Paar.*

Dasselbe gilt auch dann, wenn man anstatt des Verschwindens der ersten Variation voraussetzt, daß $(g, \mathfrak{v})$ *ein Haarsches Paar ist.*

B e w e i s. Wir beschränken uns zunächst auf stetig differenzierbare $\varphi(x)$. Wir setzen in der Formel der ersten Variation statt $\zeta(x)$ die Funktion $\varphi(x)\,\zeta(x)$ ein:

$$\int_B [(g\varphi + \mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi)\,\zeta + \varphi\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\zeta]\,dV = 0.$$

Dies kann offenbar auch so ausgedrückt werden, daß die erste Variation von $(g\varphi + \mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi\mathfrak{v})$ verschwindet. Man wendet das Haarsche Lemma an und bekommt auf diese Weise den ersten Teil unseres Satzes, aber vorläufig nur für stetig differenzierbare $\varphi(x)$. Für ein, einer Lipschitzschen Bedingung genügendes $\varphi(x)$ folgt der erste Teil des Satzes dadurch, daß man φ durch eine geeignete Folge stetig differenzierbarer Funktionen im Mittel so approximiert, daß auch die Gradienten der approximierenden Funktionen gegen grad φ konvergieren. Eine solche Approximation ergibt sich z. B. aus der Fourierschen Entwicklung von φ. Der zweite Teil des Satzes folgt aus der Umkehrung des Haarschen Lemmas.

B e m e r k u n g. Der jetzt bewiesene Satz ist eine fast triviale Verallgemeinerung des Haarschen Lemmas. Es ist doch zweckmäßig ihn gesondert auszusprechen, weil man sonst — statt Bezugnahme auf den Satz — den zu seinem Beweis notwendigen Kunstgriff (Ersetzung von ζ durch $\varphi\zeta$) oft wiederholen müßte. Dieser Kunstgriff ist übrigens derselbe, mit welchem der Greensche Satz aus dem Gaußschen Satze abgeleitet wird. In unseren Betrachtungen spielt die verallgemeinerte Haarsche Lemma dieselbe Rolle, wie in den Haarschen Betrachtungen der Greensche Satz. Wir werden im späteren das verallgemeinerte Haarsche Lemma kurz auch „Lemma“ nennen.

4. Die Anwendung des Haarschen Lemmas auf das Variationsproblem (2). Wenn z eine Extremale des Problems (2) ist, dann ist, wie in der Fussnote [9]) schon bemerkt, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S}\right)$ ein Variationspaar, wo

$$\mathfrak{S}=\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right)$$

bedeutet. Es ergibt sich also mit Hilfe des Haarschen Lemmas für jede in B liegende geschlossene glatte Fläche S und für das von ihm begrenzte Gebiet T die Relation

$$\int_T \frac{\partial f}{\partial z}\, dV = \int_S \mathfrak{S}_\nu\, dS = \int_S \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\, \nu_\alpha\, dS,$$

wo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ die Richtungskosinusse der äußeren Normale von S bedeuten. Wir werden diese Relation die Haarsche Relation des Problems (2) nennen.

Es ergibt sich aus der Umkehrung des Haarschen Lemmas, daß umgekehrt, wenn die Haarschen Relationen für das Paar $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S}\right)$ bezüglich der Funktion $z=z^0$ $\left(\text{das heißt die Werte } z=z^0(x),\ p^0_\alpha=\frac{\partial z^0}{\partial x_\alpha} \text{ eingesetzt}\right)$ erfüllt werden, dann ist z^0 eine Extremale des Problems (2).

5. Die Anwendung des Haarschen Lemmas auf Probleme mit einer variierenden Begrenzung. Wir betrachten das Problem (2), ohne daß die Werte von z an der Begrenzung von B vorgeschrieben wären. Im $n+1$-dimensionalen $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$-Raum betrachtet ist also die $n-1$-dimensionale Begrenzung der n-dimensionalen Fläche $z=z(x_1, \ldots, x_n)$ nicht fest, sondern kann an derjenigen (n-dimensionalen) Zylinderfläche frei variieren, welche senkrecht auf der Ebene $(x_1, \ldots, x_n)$ steht und durch den Rand von B hindurchgeht. Wir nehmen an, daß der Rand von B eine glatte Fläche S ist. Es ist aus der klassischen Theorie des Variationskalküls bekannt, daß, wenn z das Integral I bei dieser Konkurrenz zu einem Minimum macht, dann die Bedingung erfüllt wird:

$$\mathfrak{S}_\nu = \frac{\partial f}{\partial p_1}\nu_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2}\nu_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\nu_n = 0 \text{ an } S. \tag{9}$$

Die klassischen Methoden setzen aber die zweimalige Differenzierbarkeit der Extremale voraus. GERGELY[6]) hat die Bedingung für den Fall bewiesen, daß nur einmalige Differenzierbarkeit von z angenommen wird. Wir werden die Gergelyschen Ergebnisse wesentlich kürzer beweisen.

Man bekommt mit der bekannten klassischen Methode, daß die erste Variation verschwindet, das heißt

$$K(\zeta) = \int_B \left(\frac{\partial f}{\partial z}\zeta + \mathfrak{S} \operatorname{grad} \zeta\right) dV = 0 \tag{10}$$

(im Gegensatz zu den Problemen mit einer festen Begrenzung) für *alle* stetig differenzierbaren ζ, gleichgültig, ob ζ an S verschwindet, oder nicht. Es tritt also das verallgemeinerte Haarsche Lemma in Kraft. Durch Anwendung desselben bekommt man:

$$K(\varphi) = \int_S \varphi \mathfrak{S}_\nu \, dS$$

für jede stetig differenzierbare Parameterfunktion φ. Die linke Seite ist aber wegen (10) gleich 0. Da φ an S willkürlich ist, ergibt sich die zu beweisende Gleichung (9).

§ 2. Die Jacobische Theorie.

6. Das akzessorische Problem. Es sei z eine Extremale des Problems (2). Man versteht unter dem zum Problem (2) (bezüglich der Extremale z) gehörigen akzessorischen Problem folgendes:

$$J = \int_B \Omega(u) \, dV = \text{Extremum},$$

wobei[11])

$$(11) \quad \Omega(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + Q(\operatorname{grad} u).$$

Die erste Variation des akzessorischen Problems kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$(12) \qquad J'(\zeta) = 2 \int_B \Omega(u, \zeta) \, dV,$$

wo $\Omega(u, v)$ die zur quadratischen Form $\Omega(u)$ gehörige bilineare Form

$$(13) \quad \Omega(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} uv + \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + v \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} uv + \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} \frac{\partial (uv)}{\partial x_\alpha} + Q(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

bedeutet. Hier bedeutet $Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ die zu Q gehörige bilineare Form:

$$Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \, \partial p_\beta} a_\alpha b_\beta .$$

Man kann die zweite Variation des ursprünglichen Problems mit Hilfe der Form Ω folgendermaßen schreiben:

$$(14) \qquad I''(\zeta) = \int_B \Omega(\zeta) \, dV.$$

---

[11]) Wir machen darauf aufmerksam, daß man für jeden griechischen Index, der in einem Gliede zweimal vorkommt, von 1 bis n zu summieren hat.

$\Omega(u, v)$ kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Omega(u, v) = g v + \mathfrak{v} \operatorname{grad} v,$$

wo

$$g = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u + \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$$

ist und die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ sind:

$$v_\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} u + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \, \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}.$$

Es ist also die Haarsche Relation des akzessorischen Problems

$$\int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u + \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) dV = \int_S \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial p_\alpha} u + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \, \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) \nu_\alpha \, dS.$$

7. Satz. *Wenn das Problem elliptisch ist und seine Extremale z stetig differenzierbar ist, dann gelten die folgenden Sätze:*

1. *Wenn das akzessorische Problem eine stetig differenzierbare Extremale u hat, welche in dem abgeschlossenen (das heißt: mit seinen Häufungspunkten ergänzten) Bereiche B nirgends verschwindet, dann ist die zweite Variation für jedes nicht identisch verschwindende, zulässige (also am Rande von B verschwindende, stetig differenzierbare) ζ positiv.*

2. *Wenn das akzessorische Problem eine stetig differenzierbare Extremale u besitzt, welche auf einer, im Inneren von B liegenden, glatten, geschlossenen Fläche S überall verschwindet, aber grad u auf S nicht identisch verschwindet, dann gibt es ein solches zulässiges ζ, für welches die zweite Variation negativ ist.*

3. *Wenn $z(x, t)$ eine Extremalenschar des ursprünglichen Problems mit dem Parameter t ist, und $\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t}$ nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einmal stetig differenzierbar ist, dann ist $\dot{z}$ eine Extremale des akzessorischen Problems.*

Beweis. 1. Es sei ζ zulässig und verschwinde nicht identisch in B, es sei weiter u eine in B nirgends verschwindende Extremale des akzessorischen Problems. Dann ist auch $\frac{\zeta^2}{u}$ eine zulässige Funktion. Es gilt also infolge (12)

$$\int_B \Omega\left(u, \frac{\zeta^2}{u}\right) dV = 0. \tag{15}$$

Wenn hier (13), (11) und die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{grad} \frac{\zeta^2}{u} = \frac{2\zeta}{u} \operatorname{grad} \zeta - \frac{\zeta^2}{u^2} \operatorname{grad} u$$

und

$$u \operatorname{grad} \frac{\zeta}{u} = \operatorname{grad} \zeta - \frac{\zeta}{u} \operatorname{grad} u$$

in Betracht genommen werden, dann bekommt man:

$$\Omega\left(u, \frac{\zeta^2}{u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial p_\alpha}\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} + Q\left(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\frac{\zeta^2}{u}\right) =$$

$$= \Omega(\zeta) - Q(\operatorname{grad}\zeta) + 2\frac{\zeta}{u}Q(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\zeta) - \frac{\zeta^2}{u^2}Q(\operatorname{grad} u) =$$

$$= \Omega(\zeta) - Q\left(\operatorname{grad}\zeta - \frac{\zeta}{u}\operatorname{grad} u\right) =$$

$$= \Omega(\zeta) - Q\left(u \operatorname{grad}\frac{\zeta}{u}\right).$$

(15) kann also folgendermaßen geschrieben werden:

$$\int_B \Omega(\zeta)\, dV = \int_B Q\left(u \operatorname{grad}\frac{\zeta}{u}\right) dV.$$

Hier verschwindet grad $\frac{\zeta}{u}$ nicht identisch in B, weil sonst $\frac{\zeta}{u}$ konstant wäre, gegen unsere Annahme, daß ζ am Rande überall, im Inneren aber nicht überall (evtl. nirgends) verschwindet. Da Q positiv definit ist, ist die rechte Seite positiv. Es gilt also — Gleichung (14) in Betracht genommen —

$$I''(\zeta) > 0.$$

2a. Wir zeigen zuerst, daß die zweite Variation durch ein nicht identisch verschwindendes, stetiges und mit Ausnahme auf der Fläche S stetig differenzierbares $\zeta = \zeta_1$ zum Verschwinden gebracht werden kann. Wir wählen zu diesem Zwecke für ζ_1 die folgende Funktion:

$$\zeta_1 = \begin{cases} u \text{ in } T \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

wo u die auf der Fläche S verschwindende Extremale des akzessorischen Problems, T das von S begrenzte Bereich bedeutet. Obwohl ζ_1 keine zulässige Funktion ist, ergibt sich mit Hilfe der Methode der Abrundung der Ecken, daß die erste Variation für ζ_1 verschwindet, das heißt

$$\frac{1}{2}J'(\zeta_1) = \int_B \Omega(u, \zeta_1)\, dV = 0.$$

In unserem Fall gilt aber

$$\Omega(u, \zeta_1) = \Omega(\zeta_1, \zeta_1) = \Omega(\zeta_1).$$

(Innerhalb S infolge $u = \zeta_1$, außerhalb S darum, weil beide Seiten verschwinden.) Es gilt also in der Tat

$$I''(\zeta_1) = \int_B \Omega(\zeta_1)\, dV = 0.$$

2b. Es sei nun

$$\zeta_2 = \zeta_1 + kv,$$

wo v eine später zu wählende, am Rande von B verschwindende Funktion, k eine später zu wählende Konstante ist. Es gilt offenbar

$$(16)\quad I''(\zeta_2) = \int_B \Omega(\zeta_2)\, dV = \int_B \Omega(\zeta_1)\, dV + 2k \int_B \Omega(\zeta_1, v)\, dV + k^2 \int_B \Omega(v)\, dV.$$

Da für jedes zulässige

$$\frac{1}{2} J'(\zeta) = \int_B \Omega(u, \zeta)\, dV = \int_B (g\zeta + \mathfrak{v} \operatorname{grad} \zeta)\, dV = 0$$

ist, ergibt sich, wenn man das Lemma mit der Parameterfunktion v für die Fläche S anwendet:

$$\int_B \Omega(\zeta_1, v)\, dV = \int_T \Omega(u, v)\, dV = \int_T (gv + \mathfrak{v} \operatorname{grad} v)\, dV = \int_S v \mathfrak{v}_\nu\, dS =$$

$$= \int_S v \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \nu_\beta\, dS = \int_S v Q(\operatorname{grad} u, \nu)\, dS.$$

(Hier wurde schon in Betracht genommen, daß u auf S verschwindet.) Wir behaupten, daß es ein solches v gibt, für welches

$$(17)\qquad \int_S v Q(\operatorname{grad} u, \nu)\, dS \neq 0$$

ist.

Es wäre nämlich im entgegengesetzten Falle:

$$Q(\operatorname{grad} u, \nu) = 0.$$

Wir werden zeigen, daß dies mit unserer Annahme $\operatorname{grad} u \neq 0$ auf S zu einem Widerspruch führt. Es gilt nämlich

$$Q(\operatorname{grad} u, \nu) = \mathfrak{a} \operatorname{grad} u,$$

wobei $\mathfrak{a}$ den Vektor mit den Komponenten

$$a_\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \nu_\beta$$

bedeutet. Wenn das obige skalare Produkt verschwindet, dann verschwindet auch die in die Richtung von $\mathfrak{a}$ weisende Komponente von grad u. Diese Richtung fällt nicht in die Tangentenebene von S. Es wäre nämlich im entgegengesetzten Falle

$$\mathfrak{a}\nu = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = Q(\nu) = 0$$

im Widerspruch mit der Definitheit von Q. Es verschwinden aber andererseits auch die in die Tangentenebene von S fallenden Komponenten von grad u, weil u auf S konstant (nämlich gleich 0) ist. Es würde daher folgen, wenn (17) unrichtig wäre, daß jede Komponente von grad u gleich 0 ist. Dies stimmt aber nicht mit unserer Annahme überein. Somit ist also (17) bewiesen.

Es ergibt sich aus (17), daß die rechte Seite von (16) für geeignete Werte von k negativ ist. (Nämlich für solche, welche ein mit $\int\limits_T \Omega(u, v)\, dV$ entgegengesetztes Vorzeichen und einen hinreichend kleinen absoluten Betrag haben.) Man kann aus dem (nicht unbedingt zulässigen) ζ_2 mit der Methode der Abrundung der Ecken auch ein zulässiges ζ konstruieren, für welches $I''(\zeta)$ ebenfalls negativ ausfällt.

3. Da $z(x, t)$ für alle Werte von t eine Extremale des Problems (2) ist, gilt infolge des Lemmas für jede glatte, geschlossene Fläche S die Relation

$$\int\limits_T \frac{\partial f}{\partial z}\, dV = \int\limits_S \mathfrak{S}_\nu\, dS = \int\limits_S \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\, \nu_\alpha\, dS.$$

Wenn man dies nach t differenziert, dann bekommt man die Relation:

$$\int\limits_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) dV = \int\limits_S \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial p_\alpha} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha\, \partial p_\beta} \dot{p}_\beta \right) \nu_\alpha\, dS.$$

Dies ist aber gerade die Haarsche Relation des akzessorischen Problems für $u = \dot{z}$; es ist also $\dot{z}$ eine Extremale des akzessorischen Problems.

(Eingegangen am 30. Juli 1941.)

Über projektive Kegelschnittsysteme.

Von B. DOLAPTSCHIJEW (Sofia).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist einen Satz über projektive Kegelschnittsysteme herzuleiten, der an und für sich einiges Interesse darbietet, ferner mit Erfolg angewendet werden kann, um die Schnittkurve zweier Rotationsflächen zweiten Grades mit sich schneidenden Drehachsen zu bestimmen.

Es handelt sich um die folgende Frage. Seien

$$f_1 + \lambda f_2 = 0 \tag{1}$$

und

$$f_1' + \lambda' f_2' = 0 \tag{2}$$

zwei verschiedene Kegelschnittsbüschel; ist es möglich eine solche Beziehung zwischen den Kurven der beiden Kegelschnittsbüschel festzustellen, daß die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Kurven zu einem festen Kegelschnitt gehören?

Wenn eine Beziehung der besagten Art besteht, so kann man die feste Schnittkurve mittels einer beliebigen Kurve (1) und der entsprechenden Kurve (2) in der Form darstellen:

$$h \equiv (f_1 + \lambda f_2) + \mu(f_1' + \lambda' f_2') = 0, \tag{3}$$

vorausgesetzt, daß die beiden einander entsprechenden Kurven verschieden sind. Werden die Grundkurven $f_1' = 0$ und $f_2' = 0$ des zweiten Büschels derart gewählt, daß sie bzw. den Kurven $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ entsprechen, dann ist

$$h \equiv f_1 + \mu_1 f_1'$$

und auch

$$h \equiv f_2 + \mu_2 f_2',$$

vorausgesetzt, daß die Kurven $f_1 = 0$, $f_2' = 0$, und ebenso die Kurven $f_2 = 0$, $f_2' = 0$ verschieden sind. Daraus folgt:

$$f_1 + \mu_1 f_1' \equiv \nu(f_2 + \mu_2 f_2'),$$

wo ν einen Proportionalitätsfaktor bedeutet; also:

$$f_1 - \nu f_2 \equiv -\mu_1 f_1' + \nu \mu_2 f_2'.$$

Das bedeutet aber, daß die Kurve

$$g \equiv f_1 - \nu f_2 = 0$$

des ersten Büschels mit der Kurve

$$-\mu_1 f_1' + \nu \mu_2 f_2' = 0$$

des zweiten Büschels identisch ist.

Stellen wir die Kegelschnittsbüschel (1) und (2) mittels der Grundkurven f_1 und g, bzw. f_1' und g dar, so ist nach (3) die feste Schnittkurve

$$h \equiv (f_1 + \lambda g) + \mu(f_1' + \lambda' g) = 0,$$

oder in anderer Form:

$$f_1 + \mu f_1' + (\lambda + \mu\lambda')g = 0. \tag{4}$$

Laut Voraussetzung sind die Kurven $f_1 = 0$, $f_1' = 0$ und $g = 0$ linear unabhängig. Für alle Werte von λ und für die entsprechenden Werte von λ' und μ stellt die Gleichung (4) dieselbe Kurve dar, und der Koeffizient von f_1 bleibt derselbe. Daraus folgt, daß auch die Koeffizienten von f_1' und von g konstant sind, d. h.

$$\mu = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \lambda + \mu\lambda' = \text{konst.},$$

oder

$$\lambda' = a + b\lambda \qquad (a, b = \text{konst.}).$$

Das bedeutet aber, daß die Beziehung zwischen den beiden Büscheln eine Projektivität ist. Offenbar entspricht dabei die gemeinsame Kurve $g = 0$ sich selbst.

Nehmen wir umgekehrt an, daß zwei Kegelschnittsbüschel eine gemeinsame Kurve $g = 0$ besitzen; es seien die beiden Büschel:

$$f_1 + \lambda g = 0$$

und

$$f_1' + \lambda' g = 0.$$

Lassen wir dem Wert λ den Wert $\lambda' = -\lambda$ entsprechen; die Schnittpunkte der entsprechenden Kurven der beiden Kegelschnittsbüschel liegen dann auf dem festen Kegelschnitt:

$$h \equiv f_1 + f_1' = 0.$$

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer eineindeutigen Beziehung zwischen zwei Kegelschnittsbüscheln, bei welcher die Schnittpunkte je zwei entsprechender Kurven auf einem festen Kegelschnitte liegen, besteht darin, daß die beiden Kegelschnittsbüschel einen gemeinsamen Kegelschnitt besitzen. Die Beziehung ist eine Projektivität bei welcher der gemeinsame Kegelschnitt sich selbst entspricht.

(Eingegangen am 1. Sept. 1943.)

Complément au théorème de Simmons sur les probabilités.

Par CHARLES JORDAN à Budapest.

Un événement se produit avec la probabilité p. En n épreuves on s'attend à le voir arriver à peu près np fois. Si np est entier et si $p<\frac{1}{2}$, le théorème de SIMMONS affirme[1]) qu'il y a plus de chances pour l'événement d'arriver moins de np fois que plus de np fois.

Nous nous sommes proposés d'examiner le cas où np n'est pas entier $\left(\text{en maintenant l'hypothèse } p<\frac{1}{2}\right)$ et nous sommes arrivés au résultat partiel suivant:

1. Si np diffère assez peu de l'entier immédiatement inférieur $[np]$, de façon que la différence n'excède pas $\frac{1}{2}$, l'affirmation contenue dans le théorème de SIMMONS subsiste.

2. Si la différence $np-[np]$ égale ou dépasse $1-p$, c'est l'inverse qui a lieu, savoir: l'événement a moins de chances d'arriver moins de np fois que plus de np fois.

Lorsque la différence $np-[np]$ est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $1-p$, nous n'avons pas pu élucider complètement le problème; il paraît cependant que le renversement des chances se produit à peu près vers le milieu, c'est-à-dire approximativement quand

$$np-[np]=\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right).$$

---

[1]) T. L. SIMMONS, A New Theorem of Probability, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **26** (1894—95), pp. 290—334.

RAGNAR FRISH, Solution d'un Problème de Probabilités, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1924, pp. 153—174 et *Comptes Rendus*, **179** (1924), pp. 1031—1034.

E. FELDHEIM, Simmons tételének új bizonyítása és általánosítása, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **45** (1930), pp. 99—113; Nuova Dimostrazione e generalizzazione di un teorema del calcolo delle probabilità, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **10** (1939), pp. 229—243.

Finalement, à l'aide de considérations de probabilités nous avons déduit les formules (9) et (14) utiles pour les fonctions Béta-incomplètes et les formules (17) et (18) utiles pour les fonctions Γ-incomplètes.

Traduisons ce que nous venons de dire en formules. La probabilité de l'événement favorable étant p à chaque épreuve, la probabilité d'obtenir ν cas favorables en n épreuves est

$$P(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} \qquad \text{où} \qquad q = 1 - p. \tag{1}$$

La moyenne des cas favorables est np; l'écart observé est $\xi = \nu - np$. Le maximum de $P(\nu)$ a lieu pour ν égal au plus grand entier contenu dans $np + p$. D'après le théorème de SIMMONS, lorsque np est entier et $p < \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{\nu=0}^{np-1} P(\nu) > \sum_{\nu=np+1}^{n} P(\nu).$$

[Si $p > \frac{1}{2}$, c'est l'écart positif qui est plus probable.]

Nous examinerons le cas où np est quelconque, et nous poserons $np = k + \varepsilon$, où $k = [np]$ et $0 \leqq \varepsilon < 1$. Nos théorèmes se formulent ainsi:

I. Lorsque ε est plus grand ou égal à q, la probabilité de *l'écart positif est plus grande* que celle de l'écart négatif. Remarquons que, dans ce cas, le maximum de $P(\nu)$ se trouve du côté des écarts positifs.

II. Lorsque ε est inférieur ou égal à un demi, la probabilité de *l'écart négatif est plus grande* que celle de l'écart positif. Le maximum de $P(\nu)$ est situé du côté des écarts négatifs.

III. Lorsque ε se trouve entre $\frac{1}{2}$ et q, alors, jusqu'à une certaine valeur de ε, l'écart négatif est plus probable que l'écart positif; au delà de cette valeur, l'écart positif devient plus probable que l'écart négatif. Le maximum de $P(\nu)$ se trouve dans les deux cas du côté des écarts négatifs. Nous n'avons réussi à déterminer cette valeur limite de ε que d'une manière approchée; elle est approximativement $\frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{2}\right)$.

I. Cas de $\varepsilon \geqq q$.

De la formule (1) on tire

$$P(\nu+1) - P(\nu) \equiv \Delta P(\nu) = \frac{np - \nu - q}{q(\nu+1)} P(\nu)$$

ce qui donne pour $\nu = k$

$$\Delta P(k) = \frac{\varepsilon - q}{q(k+1)} P(k).$$

Lorsque $\varepsilon = q$, la quantité $np + p = k + \varepsilon + p = k + 1$ est un entier et le maximum de $P(\nu)$ a lieu pour $\nu=k+1$; de plus, dans ce cas, la formule précédante donne $\Delta P(k)=0$, c'est-à-dire

$$(2)\qquad P(k)=P(k+1).$$

Lorsque $\varepsilon>q$, le plus grand entier contenu dans $np+p$ est encore $k+1$, le maximum de $P(\nu)$ est $P(k+1)$, il est situé du côté des écarts positifs et l'on a

$$(3)\qquad P(k)<P(k+1).$$

De la formule (1) on peut déduire

$$(4)\qquad P(k+2+i)=\frac{(n-k-1-i)\,p}{(k+2+i)\,q}\,P(k+1+i),$$

$$(5)\qquad P(k-1-i)=\frac{(k-i)\,q}{(n-k+i+1)\,p}\,P(k-i).$$

Examinons si le facteur dans la formule (4) est plus grand que celui qui figure dans (5). Ceci a lieu lorsqu'on a

$$[(n-k)^2-(i+1)^2]\,p^2>[(k+1)^2-(i+1)^2]\,q^2$$

ou (en éliminant k à l'aide de $k=np-\varepsilon$)

$$\left(n+\frac{\varepsilon}{q}\right)^2+(i+1)^2\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)>\left(n+\frac{1-\varepsilon}{p}\right)^2$$

et, à plus forte raison, lorsque

$$\frac{\varepsilon}{q}\geqq\frac{1-\varepsilon}{p}\qquad\text{ou}\qquad\varepsilon\geqq q.$$

Par suite, dans le cas considéré, le premier facteur est plus grand que le second, pour $i=0, 1, 2, \ldots$ En partant de (2) ou de (3) on déduit pas à pas que

$$P(k+1+i)>P(k-i),$$

donc

$$(6)\qquad \sum_{i=0}^{k}P(k+1+i)>\sum_{i=0}^{k}P(k-i).$$

Pour démontrer que $n-1-k>k$, éliminons k ; on trouve

$$(7)\qquad n+1>2(np-\varepsilon).$$

Montrons d'abord que

$$(8)\qquad n-1>2(np-q)\,;$$

en simplifiant cela donne $nq+q>np+p$, ou $q>p$. On en conclut que l'inégalité (8) est satisfaite ; il en résulte

$$n+1>2(np+p)$$

et, par suite l'inégalité (7) est satisfaite à plus forte raison. Donc, d'après (6).

$$\sum_{i=0}^{n-k-1}P(k+1+i)>\sum_{i=0}^{k}P(k-i).$$

De là, le Théorème I: Lorsque $\varepsilon \geqq q$, la probabilité des écarts positifs est plus grande que celle des écarts négatifs. Le maximum de $P(\nu)$ se trouve du côté des écarts positifs (si $\varepsilon > q$) ou des deux côtés (si $\varepsilon = q$).

Remarque 1. La probabilité pour que le nombre des cas favorables ne dépasse pas λ en n épreuves est donnée aussi, d'une manière rigoureuse, par le rapport d'une fonction Béta-incomplète à la fonction complète correspondante:[2])

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) = I_q(n-\lambda;\ \lambda+1).$$

En posant $\lambda = k$, on obtient la probabilité d'un écart négatif.

D'après le théorème précédent, on a

$$I_q(n-k;\ k+1) = I_q(nq+\varepsilon;\ np+1-\varepsilon) < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 1 > \varepsilon \geqq q > \frac{1}{2}.$$

Cette probabilité diminue quand ε augmente; la valeur la plus rapprochée de $\frac{1}{2}$ sera obtenue pour $\varepsilon = q$; alors on a

$$I_q[(n+1)q;\ (n+1)p] < \frac{1}{2}$$

pour toutes les valeurs de n, si $q > \frac{1}{2}$.

Cette inégalité sera avec la notation des tables de PEARSON

(9) $$I_x(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \mathfrak{p} \leqq \frac{1-x}{x}\mathfrak{q} \quad \text{et} \quad x \geqq \frac{1}{2}.$$

Ce résultat obtenu à l'aide des considérations de probabilités, est intéressant au point de vue des fonctions Béta-incomplètes.

II. Cas où $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le maximum correspond à $\nu = k$; par suite

$$P(k) > P(k+1).$$

Au contraire, l'inégalité

$$P(k-i) > P(k+1+i)$$

n'est pas toujours vérifiée. Pour les petites valeurs de i, le facteur dans (4) est plus petit que celui qui se trouve dans (5), mais si i est assez grand le premier devient plus grand que le second, c'est-à-dire, pour une certaine valeur $i = \omega$,

$$P(k-\omega) < P(k+1+\omega).$$

[2]) CH. JORDAN, Calculus of Finite Differences (Budapest, 1939), p. 86.
K. PEARSON, Tables of the Incomplete Beta-Function (London, 1934).

De ce qui précède, il suit qu'en tout cas $\omega > 0$. Si cette inégalité est satisfaite, on déduit de (4) et de (5) que, pour toutes les valeurs de $i > \omega$, on a

$$P(k-i) < P(k+1+i).$$

Dans ce qui suit nous utiliserons une méthode semblable à celle qui a été employée par M. FELDHEIM pour démontrer le théorème de SIMMONS dans le cas où np est entier.

Lorsque $i < \omega$, on a

$$(\omega - i)\, P(k+1+i) < (\omega - i)\, P(k-i)$$

et lorsque $i \geqq \omega$

$$(i-\omega)\, P(k+1+i) \geqq (i-\omega)\, P(k-i)\,;$$

on en tire

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} (\omega-i)\, P(k+1+i) < \sum_{i=0}^{\omega-1} (\omega-i)\, P(k-i), \tag{10}$$

$$\sum_{i=\omega}^{k} (i-\omega)\, P(k+1+i) > \sum_{i=\omega}^{k} (i-\omega)\, P(k-i).$$

Comme $n-k-1 > k$, on a à fortiori

$$\sum_{i=\omega}^{n-k-1} (i-\omega)\, P(k+1+i) > \sum_{i=\omega}^{k} (i-\omega)\, P(k-i). \tag{11}$$

En retranchant membre à membre l'inégalité (11) de l'inégalité (10), on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-k-1} (\omega-i)\, P(k+1+i) < \sum_{i=0}^{k} (\omega-i)\, P(k-i). \tag{12}$$

La moyenne des écarts étant nulle on a

$$\sum_{\nu=k+1}^{n} (\nu - np)\, P(\nu) = \sum_{\nu=0}^{k} (np-\nu)\, P(\nu).$$

En posant dans le premier membre $\nu = k+1+i$ et dans le second $\nu = k-i$, on trouve

$$\sum_{i=0}^{n-k-1} (i+1-\varepsilon)\, P(k+1+i) = \sum_{i=0}^{k} (i+\varepsilon)\, P(k-i). \tag{13}$$

Finalement, en ajoutant (12) et (13), on a

$$\sum_{i=0}^{n-k-1} (\omega+1-\varepsilon)\, P(k+1+i) < \sum_{i=0}^{k} (\omega+\varepsilon)\, P(k-i),$$

et on en conclut que si $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-k-1} P(k+1+i) < \sum_{i=0}^{k} P(k-i).$$

Théorème 2. La probabilité de *l'écart négatif est plus grande* que celle de l'écart positif, si $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ en supposant $p < \frac{1}{2}$; par contre si $p > \frac{1}{2}$, l'écart positif est plus probable que l'écart négatif.

Remarque 2. En exprimant la probabilité de l'écart négatif par une fonction Béta-incomplète, on trouve $I_q(nq+\varepsilon; np+1-\varepsilon) > \frac{1}{2}$. Dans ce cas, la valeur la plus rapprochée de $\frac{1}{2}$ est donnée par $\varepsilon = \frac{1}{2}$; ce qui donne, avec les notations des tables de PEARSON, $\left(x > \frac{1}{2}\right)$:

$$I_x(\mathrm{p}, \mathrm{q}) > \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \mathrm{q} \geqq \frac{1-x}{x}\mathrm{p} + \frac{x-\frac{1}{2}}{x}. \tag{14}$$

Pour obtenir une valeur de q donnant d'une manière approchée $I_x(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \frac{1}{2}$, on peut prendre la moyenne des grandeurs q figurant dans les inégalités (9) et (14). On aura

$$\mathrm{q} = \frac{1-x}{x}\mathrm{p} + \frac{x-\frac{1}{2}}{2x} \tag{15}$$

ce qui correspond dans le problème de probabilité à $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{2}\right)$.

D'après les tables, généralement le premier entier supérieur à la valeur (15) de q donne: $I_x(\mathrm{p}, \mathrm{q}) < \frac{1}{2}$, et le premier inférieur $I_x(\mathrm{p}, \mathrm{q}) > \frac{1}{2}$.

Exemple. $I_{0,8}(50; 12) = 0,4236$, $I_{0,8}(50; 13) = 0,5254$. Dans ce cas, q donné par (15) est 12,518.

III. Cas où $\frac{1}{2} < \varepsilon < q$.

Lorsque ε varie de $\frac{1}{2}$ à q, alors jusqu'à une certaine valeur la probabilité de l'écart négatif reste plus grande qu'un demi et, au delà de cette valeur, elle devient plus petite. Dans les deux cas, le maximum de $P(\nu)$ correspond à $\nu = k$; elle est donc située du côté des écarts négatifs.

La valeur limite en question est d'après la *Remarque 2* approximativement égale à $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{2}\right)$. On en conclut que si $\varepsilon \geqq \frac{q+\frac{1}{2}}{2}$, la probabilité de l'écart négatif est généralement inférieure et dans le cas contraire supérieure à un demi.

Les Tables de la fonction Béta-incomplète montrent que si $q < 0{,}9$ la valeur ci-dessus donne des résultats exacts, mais si $q \geqq 0{,}9$ il faut retrancher de $\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)$ la fraction 0,045. Par suite, lorsque $q \geqq 0{,}9$, la probabilité de l'écart négatif sera plus grande que la probabilité de l'écart positif si

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right) - 0{,}045. \tag{15'}$$

Exemple 1. $p=0{,}1$, $q=0{,}9$, $\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)=0{,}7$

n	k	ε	$I_q(n-k, k+1)$
6	0	0,6	$I_{0,9}\ (6; 1) = 0{,}5314$
7	0	0,7	$I_{0,9}\ (7; 1) = 0{,}4783$
16	1	0,6	$I_{0,9}(15; 2) = 0{,}5147$
17	1	0,7	$I_{0,9}(16; 2) = 0{,}4818$
26	2	0,6	$I_{0,9}(24; 3) = 0{,}5105$
27	2	0,7	$I_{0,9}(25; 3) = 0{,}4846$
36	3	0,6	$I_{0,9}(33; 4) = 0{,}5085$
37	3	0,7	$I_{0,9}(34; 4) = 0{,}4864$
46	4	0,6	$I_{0,9}(42; 5) = 0{,}5073$
47	4	0,7	$I_{0,9}(43; 5) = 0{,}4878$

On voit que les probabilités s'approchent d'un demi si n augmente.

Exemple 2. $p=1/5$, $q=4/5$, $\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)= 13/20$.

33	6	12/20	$I_{0,8}(27; 7) = 0{,}5004$
34	6	16/20	$I_{0,8}(28; 7) = 0{,}4661$

Exemple 3. $p=0{,}3$, $q=0{,}7$ $\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)=0{,}6$

35	10	0,5	$I_{0,7}(25; 11) = 0{,}5100$
32	9	0,6	$I_{0,7}(23; 10) = 0{,}4951$

Exemple 4. $p=1/20$, $q=19/20$, $\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)= 29/40$

n	k	ε	
33	1	26/40	$I_{0,95}(32; 2) = 0{,}5036$
34	1	28/40	$I_{0,95}(33; 2) = 0{,}4872$
35	1	30/40	$I_{0,95}(34; 2) = 0{,}4567$

Exemple 5. $p=0{,}02$, $q=0{,}98$ et $\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)=0{,}74$

34	0	0,68	$I_{0,98}(34;\,1)=0{,}5031$
35	0	0,70	$I_{0,98}(35;\,1)=0{,}4931$
36	0	0,72	$I_{0,98}(36;\,1)=0{,}4832$
37	0	0,74	$I_{0,98}(37;\,1)=0{,}4735$

Ces résultats sont conformes à la règle (15′).

Remarque 3. Comme dans les Tables, $I_x(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ n'est calculé que pour $\mathfrak{p}\leqq 50$ et $\mathfrak{q}\leqq 50$, et $\mathfrak{p}=n-k$, les formules précédentes sont difficilement utilisables lorsque $n>50$; mais si p est petit, on peut employer la formule approchée connue, donnant la probabilité d'un écart négatif à l'aide des fonctions Γ incomplètes[3])

$$(16)\qquad \sum_{\nu=0}^{k} P(\nu) \sim \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(np)^\nu e^{-np}}{\nu\,!} = 1 - I(\bar{u}, \mathfrak{p})$$

où $\bar{u}=\dfrac{np}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{k+1}}$ et $\mathfrak{p}=k$.

Lorsque $\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$, la probabilité (16) et plus grande que $\frac{1}{2}$ et $I(u, \mathfrak{p})<\frac{1}{2}$. De la formule de Doodson[3]) on conclut que

$$(17)\qquad I(\bar{u}, \mathfrak{p})<\frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \bar{u}\leqq\sqrt{\mathfrak{p}+1}-\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\mathfrak{p}+1}}.$$

(Cette valeur est plus serrée que celle qui se trouve dans loc. cit. 2.)

Lorsque $\varepsilon\geqq q$, la probabilité (16) est plus petite que $\frac{1}{2}$ et $I(\bar{u}, \mathfrak{p})>\frac{1}{2}$. Il en résulte à fortiori, en négligeant le terme $1/3\sqrt{\mathfrak{p}+1}$,

$$(18)\qquad I(\bar{u}, \mathfrak{p})>\frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \bar{u}\geqq\sqrt{\mathfrak{p}+1}.$$

Les tables de la fonction Γ incomplète sont calculées jusqu'à $\mathfrak{p}\leqq 50$. Comme $\mathfrak{p}=k=np-\varepsilon$, et que p est petit, n peut être déjà assez grand.

Exemple 1. Soit $p=0{,}1$, $q=0{,}9$ et $n=47$. *Formule rigoureuse.* $P=I_q(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$. On a $np=4{,}7$, $k=4$, $\varepsilon=0{,}7$, $\mathfrak{p}=44$, $\mathfrak{q}=5$. Comme

$$\varepsilon>\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)-0{,}045=0{,}655,$$

la probabilité de l'écart négatif doit être d'après (15′) plus petite qu'un

3) K. Pearson, Tables of the Incomplete Γ-Function (London, 1922), p. VIII; A. T. Doodson, Biometrika, Vol. XI. p. 428.

demi. On trouve

$$P = I_{0,9}(44,5) = 0,48778.$$

Formule approchée. $P = 1 - I(\bar{u}, \mathfrak{p})$. On a $\bar{u} = np/\sqrt{k+1} = 2,1466$. $\mathfrak{p} = k = 4$. Comme dans ce cas

$$\bar{u} > \frac{3(k+1)-1}{3\sqrt{k+1}} = 2,087,$$

on doit avoir, d'après (17), $I(\bar{u}, \mathfrak{p}) \geqq \frac{1}{2}$. On trouve $I(u, p) = 0,50468$. où $P = 0,49532$.

Exemple 2. Soit $p = 0,1$ et $n = 46$. *Formule rigoureuse.* On a $np = 4,6$, $k = 4$, $\varepsilon = 0,6$, $\mathfrak{p} = 42$, $\mathfrak{q} = 5$. Comme $\varepsilon < 0,655$, la probabilité de l'écart négatif doit être, d'après (15′), plus grande qu'un demi; en effet on a

$$P = I_{0,9}(42,5) = 0,50732.$$

Formule approchée. On a $np = 4,6$, $\mathfrak{p} = k = 4$ $\bar{u} = np/\sqrt{k+1} = 2,0572$. Comme $\bar{u} < 2,087$ on doit avoir, d'après (17), $I(\bar{u}, \mathfrak{p}) < \frac{1}{2}$. On trouve $I(2,057; 4) = 0,48663$ et $P = 0,5134$.

(Reçu le 4 novembre 1942.)

Über die Fouriersche Reihe der Abkühlung.

Von L. FEJES in Kolozsvár.

1. Es seien $0=\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ in zunehmender Größenordnung die nichtnegativen Wurzeln der transzendenten Gleichung $z+h \operatorname{tg} \pi z=0$ $(h>0)$[1]), (x_0, x_1) ein beliebiges reelles Intervall von der Länge $x_1-x_0=2\pi$ und $f(x)$ eine in (x_0, x_1) erklärte reelle L-integrierbare Funktion. Wir nennen die Reihe

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \mu_\nu x + b_\nu \sin \mu_\nu x), \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{h}{2(1+\pi h)} \int_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt, \quad a_\nu = \frac{2\mu_\nu}{2\pi\mu_\nu - \sin 2\pi\mu_\nu} \int_{x_0}^{x_1} f(t) \cos \mu_\nu t\, dt,$$

$$b_\nu = \frac{2\mu_\nu}{2\pi\mu_\nu - \sin 2\pi\mu_\nu} \int_{x_0}^{x_1} f(t) \sin \mu_\nu t\, dt, \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

— nach dem Vorschlag des Herrn Professor L. FEJÉR — *die Fouriersche Reihe der Abkühlung* von $f(x)$[2]).

Diese Reihe geht im Grenzfall $h \to \infty$ in die gewöhnliche Fouriersche Reihe über, verhält sich aber trotz dieser formalen Übereinstimmung in mehreren Hinsichten gegenüber der gewöhnlichen Fourier-Reihe verschieden. Fassen wir zunächst kurz die wichtigsten Ergebnisse bezüglich dieser Reihe zusammen!

---

[1]) Setzt man $\mu_\nu = \nu - \frac{1}{2} + \delta_\nu(h)$, so gilt $\frac{1}{2} = \delta_0(h) > \delta_1(h) > \delta_2(h) > \ldots$; $\delta_\nu(h) = \frac{h}{\pi\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$. Für ein festes ν ist dagegen $\lim\limits_{h\to\infty} \delta_\nu(h) = \frac{1}{2}$.

[2]) FOURIER stößt im Problem der „radialen Abkühlung einer Kugel" an den Sonderfall $x_0+x_1=0$, $f(x)+f(-x)=0$, d. h. an das Problem der Entwicklung in $(0, \pi)$ in eine reine Sinusreihe. Dieser Sonderfall ist in erster Reihe dadurch ausgezeichnet, daß $\{\sin \mu_\nu x\}$ in Bezug auf $(0, \pi)$ — und daher auch für $(-\pi, \pi)$ — ein Orthogonalsystem ist, während die Orthogonalität durch Hinzufügung des Systems $\{\cos \mu_\nu x\}$, oder durch Ersetzung von $(-\pi, \pi)$ durch ein anderes Intervall verloren geht.

2. Die Reihe (1) ist als Sonderfall der allgemeineren Cauchyschen Exponentialreihe[3]) im Inneren von (x_0, x_1) mit der gewöhnlichen Fourier-Reihe von $f(x)$ äquikonvergent und stellt hier dieselbe Funktion dar wie die gewöhnliche Fourier-Reihe[4]). Bezeichnen wir die Partialsummen der Reihe (1) mit $s_n(x)$, so gilt genauer:

$$(2,1)\qquad s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin n(x-t)}{x-t}f(t)\,dt+\eta_n(x),$$

wobei $\eta_n(x)$ in $(x_0+\delta, x_1-\delta)$ für $n\to\infty$ gleichmäßig gegen Null strebt, wie klein auch die positive Größe δ sei.

Für die Intervallendpunkte x_0, x_1 gilt[5]):

$$(2,2)\qquad \begin{aligned} s_n(x_0)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nt}{t}\,\frac{f(x_0+t)-f(x_1-t)}{2}\,dt+o(1),\\ s_n(x_1)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nt}{t}\,\frac{f(x_1-t)-f(x_0+t)}{2}\,dt+o(1).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(2,3)\qquad \lim_{n\to\infty}\,[s_n(x_0)+s_n(x_1)]=0.$$

Es läßt sich ferner zeigen[6]), daß aus der Konvergenz bzw. Divergenz der betrachteten Reihe an einer beliebigen Stelle x die Konvergenz bzw. Divergenz an sämtlichen Stellen $x\pm 2m\pi$ $(m=1,2,\ldots)$ folgt. Es gilt die Gleichheit (2, 3) enthaltende Beziehung

$$(2,4)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{s_n(x)+s_n(x+2\pi)}{2}=he^{-hx}\int_{x_0}^{x}e^{ht}f(t)\,dt,\qquad x_0\leqq x\leqq x_1,$$

woraus sich die Summe der betrachteten Reihe in $(x_1, x_1+2\pi)$ bestimmen läßt.

Wir heben schließlich nur noch ein — zum Lebesgueschen Satz über gliedweise Integration der Fourier-Reihen analoges — Ergebnis hervor[7]): Die aus der Reihe (1) durch gliedweise Integration erhaltene Reihe konvergiert in (x_0, x_1) gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral

3) É. Picard, Traité d'analyse II (3e éd.), S. 198—203.

4) L. Fejes, Des séries exponentielles de Cauchy, *Comptes Rendus*, **200** (1935), S. 1712—1714.

5) Fejes, L., A Cauchy-féle exponenciális sor, *Mat. és Fiz. Lapok*, **45** (1938), S. 115—132.

6) Fejes, L., A lehülés Fourier-soráról, *Mat. és Term.-tud. Értesitő*, **61** (1942), S. 478—495.

7) s. Fußnote 5.

von $f(x)$:

$$(2, 5)\quad \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = c + a_0 x + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{b_\nu}{\mu_\nu}\cos\mu_\nu x + \frac{a_\nu}{\mu_\nu}\sin\mu_\nu x\right),\quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

wobei c eine geeignete Konstante bedeutet.

3. Entwickelt man ein Polynom

$$\tau(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (\alpha_\nu \cos\mu_\nu x + \beta_\nu \sin\mu_\nu x)$$

in (x_0, x_1), für die $\tau(x_0) + \tau(x_1) \neq 0$ ist, in eine Fouriersche Reihe der Abkühlung, so konvergiert dieselbe für $x_0 < x < x_1$ gegen $\tau(x)$, ist aber wegen (2, 3) keineswegs mit $\tau(x)$ identisch. Zieht man aus dieser Reihe $\tau(x)$ ab, so erhält man eine Reihe der Gestalt

$$(3, 1)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \cos\mu_\nu x + B_\nu \sin\mu_\nu x),$$

die in allen inneren Punkten des Intervalls (x_0, x_1) gegen Null strebt. Die Unizitätssätze der gewöhnlichen trigonometrischen Reihen verlieren daher für derartige Reihen ihre Gültigkeit. Vielmehr möchte man im ersten Augenblick nach den obigen Betrachtungen erwarten, daß es für die identisch verschwindende Funktion in (x_0, x_1) unendlich viele wesentlich verschiedene Entwicklungen gäbe.

Dies trifft aber nicht zu! Wir werden zeigen, daß eine — gewissen ziemlich allgemeinen Bedingungen genügende — Reihe der Gestalt (3, 1), die in (x_0, x_1) fast überall gegen Null strebt, bis auf die Normierung eindeutig bestimmt ist. Dies folgt aus dem

Satz: *Es sei* $\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos\mu_\nu x + b_\nu \sin\mu_\nu x)$ *eine Reihe mit den Partialsummen* $s_n(x)$, *für die* $\int_{x_0}^{x} s_n(t)\,dt$ *in* (x_0, x_1) *gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral einer L-integrierbaren Funktion* $s(x)$ *strebt, und für die* $\lim_{n\to\infty} [s_n(x_0) + s_n(x_1)] = 0$ *ausfällt. Dann ist diese Reihe die Fouriersche Reihe der Abkühlung von* $s(x)$.

Das Bestehen von (2, 3) erweist sich daher nicht nur als eine notwendige, sondern — im wesentlichen — auch als eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Reihe von der Gestalt (3, 1) Fourier-Reihe der Abkühlung in (x_0, x_1) sei.

Wir wollen diesen Satz an einigen Anwendungen erläutern. Bemerken wir zunächst, daß die Bedingung über die gleichmäßige Konvergenz der durch gliedweise Integration erhaltene Reihe sicherlich erfüllt ist, wenn z. B. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\nu}$ konvergiert. Aus der Konvergenz dieser Reihe folgt aber — wie wir sehen werden — die gleichzeitige Konvergenz der Folge $\{s_n(x_0) + s_n(x_1)\}$. Mithin erhält man durch geeignete Komposition von zwei Reihen der Gestalt (3, 1), für die $\sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu^2 + B_\nu^2)^{\frac{1}{2}}/\nu$ konvergiert und die in (x_0, x_1) fast überall gegen Null streben, eine dritte Reihe, für die $\lim_{n\to\infty} [s_n(x_0) + s_n(x_1)] = 0$ ausfällt. Diese letztere ist aber als Fourier-Reihe der Abkühlung von $f(x) \equiv 0$ identisch Null. Wir erhalten daher aus unserem Satz als

Korollar: *Eine Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \mu_\nu x + b_\nu \sin \mu_\nu x)$, *für die* $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2}}/\nu$ *konvergiert, und die in* (x_0, x_1) *fast überall gegen Null strebt, ist bis auf die Normierung eindeutig bestimmt.*

Als eine weitere Anwendung betrachten wir die „Reihe" $\sin \mu_n x$, in der also mit Ausnahme von b_n sämtliche Koeffizienten verschwinden. Dieselbe ist nach dem obigen Satze in $(-\pi, \pi)$ die Fouriersche Reihe der Abkühlung von $\sin \mu_n x$. Wir erhalten daraus auf einem indirekten Weg das Fouriersche Ergebnis, daß nämlich die Folge

$$\left(\frac{\pi}{2} \frac{\mu_\nu}{2\pi\mu_\nu - \sin 2\pi\mu_\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \mu_\nu x \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

in $(0, \pi)$ ein normiertes Orthogonalsystem ist.

Vor dem Beweis unseres Satzes wollen wir vollständigkeitshalber den Beweisgang der Ergebnisse von 2 kurz zusammenfassen.

4. Wir erklären zunächst, was unter einer Cauchyschen Exponentialreihe zu verstehen ist. Betrachten wir zwei ganze Funktionen $\chi(z)$ und $\psi(z)$, deren Summe $\pi(z) = \chi(z) + \psi(z)$ nur einfache Nullstellen besitzt und die außerdem folgender Bedingung genüge leisten: Es lassen sich zwei positive Größen σ und M_σ und eine mit dem Anfangspunkt konzentrische Kreisfolge $K_1, K_2, \ldots$ mit den Halbmessern $r_1 < r_2 < \ldots$ $(r_n \to \infty)$ derart angeben, daß für sämtliche Werte von n

$$\int_{K_n^+} \left\{\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\right| + \left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}\right|\right\} |e^{\sigma z}|\,|dz| < M_\sigma \tag{4, 1}$$

ausfällt, wobei K_n^+ den in der Halbebene $R[z] \geqq 0$ liegenden Teil von K_n bedeutet. Sind zwei derartige Funktionen $\chi(z)$ und $\psi(z)$ vorhanden, so bezeichnen wir mit $\bar{\sigma}$ die obere Grenze derjenigen Größen σ, zu denen sich eine die Ungleichung (4, 1) befriedigende Schranke M_σ angeben läßt. Betrachten wir nun ein beliebiges reelles Intervall (x_0, x_1) von der Länge $x_1 - x_0 = \sigma$ und eine in (x_0, x_1) L-integrierbare Funktion $f(x)$ und bilden die Reihe

$$\sum_{\pi(\lambda)=0} \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-t)} f(t)\, dt,$$

wobei die Summation in einer gewissen Reihenfolge auf sämtliche Wurzeln λ der Gleichung $\pi(\lambda) = 0$ zu erstrecken ist. Von dieser Reihe bilden wir durch gewisse Anordnung und Gruppierung der Glieder eine wohlbestimmte neue Reihe. Und zwar fassen wir sämtliche Glieder der ursprünglichen Reihe, für die $r_{\nu-1} \leqq |\lambda| < r_\nu$ $(r_0 = 0)$ ist, in einem einzigen Glied der neuen Reihe zusammen. Die so erhaltene Reihe

$$(4,2) \qquad f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r_{\nu-1} \leqq |\lambda| < r_\nu} c_\lambda e^{\lambda x}, \quad c_\lambda = \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

nennen wir die Cauchysche Exponentialreihe von $f(x)$.

Diese Reihe ergibt im Fall $\chi(z) = e^{\pi z}$, $\psi(z) = -e^{-\pi z}$ die gewöhnliche Fourier-Reihe, im Fall $\chi(z) = (z+h)\, e^{\pi z}$, $\psi(z) = (z-h)\, e^{-\pi z}$ die Fouriersche Reihe der Abkühlung. Im ersten Fall kann man etwa $r_n = n + \frac{1}{2}$, im zweiten etwa $r_n = n$ setzen.

Für die Partialsummen der Reihe (4, 2) gilt

$$\sum_{|\lambda| < r_n} c_\lambda e^{\lambda x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\, dt\, dz.$$

Mit Rücksicht auf $\frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1 - \frac{\psi(z)}{\pi(z)}$ können wir das rechtstehende Integral in die Summe folgender drei Integrale zerlegen:

$$(4,3) \qquad \sum_{|\lambda| < r_n} c_\lambda e^{\lambda x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} F(z; x)\, dz + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n^+} F(z; x)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n^+} \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} F(-z; x)\, dz,$$

wobei wir der Kürze halber die Bezeichnung

$$F(z; x) = \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\, dt$$

eingeführt haben. Der Beweis von (2, 1) beruht auf der Bemerkung, daß das hier auftretende mittlere Integral das Dirichletsche Integral von

$f(x)$ ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} F(z;\,x)\,dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sin r_n(x-t)}{x-t} f(t)\,dt,$$

wovon wir uns durch die Vertauschung der Integrationsreihenfolge unmittelbar überzeugen können. Gleichzeitig läßt es sich zeigen, daß die beiden anderen Integrale in (4, 3) für $x_0+\delta \leqq x \leqq x_1-\delta$ $(\delta>0)$ gleichmäßig gegen Null streben.

Diese letztere Behauptung ist mit Rücksicht auf die Bedingung (4, 1) eine unmittelbare Folgerung der nahe liegenden und leicht beweisbaren Tatsache: das Integral

$$F(z;\,x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_1} e^{-z(t-x_0)} f(t)\,dt$$

strebt in $\Re(z) \geqq 0$ mit $\frac{1}{z}$ gleichmäßig gegen Null.

Ähnlicherweise lassen sich (2, 2), (2, 4) und (2, 5) aus der obigen Integraldarstellung der Partialsummen bzw. aus der Gleichung

$$c + c_0 x + \sum_{|\lambda|<r_n} \frac{c_\lambda}{\lambda} e^{\lambda x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n} \frac{\chi(z)}{z\pi(z)} F(z;\,x)\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{z\pi(z)} F(z;\,x)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} \frac{1}{z} F(z;\,x)\,dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} \frac{\chi(-z)}{-z\pi(-z)} F(-z;\,x)\,dz$$

herleiten. In die Einzelheiten wollen wir jedoch nicht näher eingehen.

5. Zum Beweis des in 3. angedeuteten Satzes machen wir einige vorbereitende Bemerkungen. Wir wollen die Operation, welche die beliebig hingeschriebene Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$$

in

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \frac{\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) + \cos\mu_\nu(x+2\pi-\alpha_\nu)}{2}$$

überführt, mit Φ bezeichnen. Es gilt

$$\Phi \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) = \frac{1+\cos 2\pi\mu_\nu}{2}\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) - \frac{\sin 2\pi\mu_\nu}{2}\sin\mu_\nu(x-\alpha_\nu),$$

woraus sich wegen $\mu_\nu + h \operatorname{tg} \pi \mu_\nu = 0$

$$\Phi \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu) = h \frac{h \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu) + \mu_\nu \sin \mu_\nu (x - \alpha_\nu)}{h^2 + \mu_\nu^2} \tag{5, 1}$$

ergibt.

Aus (5, 1) geht klar hervor, daß die beiden Reihen, die wir aus einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu)$ — für die etwa $|\varrho_\nu| \leq 1$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) gilt — durch gliedweise Integration bzw. durch Anwendung der Operation Φ erhalten, für sämtliche Werte von x äquikonvergent sind. Wesentlich aber ist für uns, daß die Reihe $\Phi \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu)$ wiederum eine Reihe von der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu)$ ist, während dies für die durch formale Integration erhaltene Reihe im allgemeinen (genauer im Fall $\varrho_0 \neq 0$) nicht zutrifft.

Wir zeigen nun, daß jedes Polynom $\tau(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \varrho_\nu \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu)$ der Gleichung

$$\Phi \tau(x) = h e^{-hx} \int_{x_0}^{x} e^{ht} \tau(t)\, dt + e^{-h(x - x_0)} \Phi \tau(x_0) \tag{5, 2}$$

genügt[8]). Dazu sei nur bemerkt, daß das unbestimmte Integral

$$\int e^{ht} \cos \mu_\nu (t - \alpha_\nu)\, dt = e^{hx} \frac{h \cos \mu_\nu (t - \alpha_\nu) + \mu_\nu \sin \mu_\nu (t - \alpha_\nu)}{h^2 + \mu_\nu^2} + C$$

ist, woraus sich wegen (5, 1) leicht (5, 2) ergibt.

Wir beweisen noch folgenden

H i l f s s a t z : Konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu)$ in (x_0, x_1) gleichmäßig gegen Null, so verschwinden sämtliche Koeffizienten ϱ_ν dieser Reihe.

Zum Beweis beachte man, daß die Reihe $\Phi \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos \mu_\nu (x - \alpha_\nu)$ wegen (5, 2) ebenfalls gleichmäßig gegen Null zustrebt. Wir können ferner voraussetzen, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varrho_\nu|$ konvergiert, denn die Operation Φ^2 (d. h. die zweimalige Anwendung von Φ) eine derartige Reihe liefert.

Setzen wir nun im Gegensatz zu unserem Hilfssatz voraus, daß die Reihe nicht identisch verschwindet. Der erste nicht verschwindende

---

8) Mit Hilfe von (5, 2) läßt sich (2, 4) auf den Beweis von (2, 3) und (2, 5) zurückführen.

Koeffizient sei $\varrho_N = 1$. Wenden wir auf die betrachtete Reihe die Operation Φ^k an. Dadurch geht ϱ_ν in $\frac{h^k}{(h^2+\mu_\nu^2)^{\frac{k}{2}}}\varrho_\nu$, α_ν etwa in $\alpha_{\nu k}$ über. Wir normieren die erhaltene Reihe derart, daß der Koeffizient von $\cos\mu_N(x-\alpha_{Nk})$ wiederum 1 sei:

$$(5,3)\qquad \frac{(h^2+\mu_N^2)^{\frac{k}{2}}}{h^k}\,\Phi^k\sum_{\nu=N}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)=$$

$$=\cos\mu_N(x-\alpha_{Nk})+(h^2+\mu_N^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\varrho_\nu}{(h^2+\mu_\nu^2)^{\frac{k}{2}}}\cos\mu_\nu(x-\alpha_{\nu k}).$$

Es gilt aber

$$\left|(h^2+\mu_N^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\varrho_\nu}{(h^2+\mu_\nu^2)^{\frac{k}{2}}}\cos\mu_\nu(x-\alpha_{\nu k})\right|\leqq\lambda^k\sum_{\nu=N+1}^{\infty}|\varrho_\nu|,$$

$$\lambda=\frac{(h^2+\mu_N^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2+\mu_{N+1}^2)^{\frac{1}{2}}}<1,$$

und somit kann die Reihe (5, 3) für genügend große Werte von k keineswegs Null als Summe besitzen. Aus diesem Widerspruch folgt unser Hilfssatz.

Nun ist zum Beweis unseres Satzes nur noch ein einziger Schritt übrig. Konvergieren die unbestimmten Integrale der Partialsummen $s_n(x)$ einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ in (x_0, x_1) gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral einer L-integrierbaren Funktion $s(x)$:

$$\int_{x_0}^{x}s_n(t)\,dt\to\int_{x_0}^{x}s(t)\,dt,\qquad x_0\leqq x\leqq x_1,$$

und ist dabei $\lim_{n\to\infty}\Phi s_n(x_0)=0$, so ist wegen (5, 2) auch $\Phi\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ gleichmäßig konvergent mit der Summe

$$\Phi\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)=he^{-hx}\int_{x_0}^{x}e^{ht}s(t)\,dt,\qquad x_0\leqq x\leqq x_1.$$

Diese Reihe ist aber zufolge unseres Hilfssatzes mit derjenigen Reihe identisch, die wir aus der Fourierschen Reihe der Abkühlung von $s(x)$ mittels der Operation Φ erhalten. Dies ist aber nur möglich, falls die betrachtete Reihe die Fouriersche Reihe der Abkühlung von $s(x)$ ist.

6. Zum Schluß machen wir noch einige Bemerkungen. Es sei $\varphi(x)$ eine reelle Funktion, die in (x_0, x_1) eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt und für die $\varphi(x_0)+\varphi(x_1)=0$ gilt. Es läßt sich

leicht zeigen, daß für die Koeffizienten a_ν, b_ν der Fourierschen Reihe der Abkühlung von $\varphi(x)$ $a_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$, $b_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$ gilt. Setzt man $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$, so leuchtet ein, daß eine beliebige Funktion $f(x)$, die in (x_0, x_1) eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt, sich in (x_0, x_1) in eine absolut konvergente Reihe der Gestalt $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (A_\nu \cos \mu_\nu x + B_\nu \sin \mu_\nu x)$ entwickeln läßt.

Die Summe dieser Reihe ist eine fastperiodische Funktion. Da aber aus (5, 2) durch Multiplikation mit e^{hx} und Differentiation $h\tau(x+2\pi) + \tau'(x+2\pi) = h\tau(x) - \tau'(x)$ folgt, so gelangen wir an folgendes Ergebnis: Erweitern wir die in einem beliebigen Intervall (x_0, x_1) erklärte Funktion $f(x)$, die eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt, von (x_0, x_1) aus durch folgende Vorschrift: 1. $f(x)$ sei für alle reelle Werte von x stetig, 2. es bestehe zwischen $f(x+a)$ und $f(x)$ die Differentialgleichung

$$hf(x+a) + f'(x+a) = hf(x) - f'(x) \quad \text{mit} \quad a = x_1 - x_0,$$

so ist die erhaltene Funktion fastperiodisch.

Schließlich sei bemerkt, daß wir gleichzeitig mit der hier betrachteten Reihe, die als Reihe der Kugelabkühlung bezeichnet werden kann, auch eine andere Reihe, die Fouriersche Reihe der Würfelabkühlung, in Betracht ziehen können. In dieser nimmt die Rolle der Gleichung $z + h \operatorname{tg} \pi z = 0$ die Gleichung $z - h \operatorname{cotg} \pi z = 0$ über. Die Reihe der Würfelabkühlung steht in gewisser Hinsicht in engerer Verbindung mit der gewöhnlichen Fourierschen Reihe als die Reihe der Kugelabkühlung. Dies ist zu erwarten, wenn wir bedenken, daß für die positiven Wurzeln $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \ldots$ von $z - h \operatorname{cotg} \pi z = 0$ $\lim_{\nu\to\infty} (\bar{\mu}_\nu - \nu) = 0$ ausfällt, während für die Folge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ $\lim_{\nu\to\infty} (\mu_\nu - \nu) = \frac{1}{2}$ gilt.

(Eingegangen am 10. März 1943.)

Bemerkung zu einer Arbeit von R. Fueter über die Klassenkörpertheorie.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Bezeichne k den Körper der rationalen Zahlen, D eine ungerade quadratfreie natürliche Zahl.

1. In einer Arbeit von FUETER[1]) kommt unter anderen wichtigen Anwendungen auch folgendes vor: Ist $D \equiv 1 \pmod 8$, so muß es in $k(\sqrt{-D})$ eine gerade Anzahl Klassen in jedem Geschlechte geben, damit die Grundeinheit in $k(\sqrt{D})$ die Norm -1 hat. Ich habe schon früher kurz bemerkt[2]), daß dieser Satz inhaltslos ist, da die Geschlechter des Körpers $k(\sqrt{-D})$ im genannten Fall $D \equiv 1 \pmod 8$ stets eine gerade Anzahl Klassen enthalten. Erst neulich bin ich in einer Arbeit von HECKE[3]) auf folgende Stelle aufmerksam geworden: „Bisher sind allerdings nur sehr selten Beziehungen zwischen den Körpern $k(\sqrt{D})$ und $k(i, \sqrt{D})$ gefunden worden. Ich nenne den Dirichletschen Satz, daß die Klassenzahl des Körpers $k(i, \sqrt{D})$ (abgesehen von dem Faktor 2) gleich dem Produkt der Klassenzahlen der beiden Körper $k(\sqrt{D})$ und $k(\sqrt{-D})$ ist, sowie einen Satz von FUETER über eine notwendige Bedingung, daß die Norm der Grundeinheit in $k(\sqrt{D})$ gleich -1 sei." Hieraus ist klar, daß HECKE der Inhaltslosigkeit obigen Satzes nicht gewahr wurde, er hat sogar dessen scheinbare Bedeutung stark hervorgehoben. Andererseits ist meine Bemerkung in der Arbeit[2]) in einer

---

[1]) R. FUETER, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Zahlentheorie, *Jahresb. D. M. V.*, **20** (1911), S. 46.

[2]) L. RÉDEI u. H. REICHARDT, Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, *Journ. f. Math.*, **170** (1933), S. 74.

[3]) E. HECKE, Über die Konstruktion der Klassenkörper reeller quadratischer Körper mit Hilfe von automorphen Funktionen, *Gött. Nachr.* (1910), S. 620. — Hier in Anm.[1]) wird Band- und Seitenzahl obiger Stelle in der Arbeit von Fueter falsch angegeben.

Fußnote versteckt, und deshalb dachte ich richtig gehandelt zu haben, daß ich hiermit auf diese Frage nochmals zurückgekommen bin.

2. Weiter möchte ich hier kurz bemerken, daß man zwischen den von FUETER betrachteten Körpern tatsächlich Zusammenhänge feststellen kann. Und zwar erhält man aus der Arbeit[2]) unmittelbar folgendes. Sind alle geraden Invarianten der Klassengruppe von $k(\sqrt{-D})$ durch 4 teilbar, so gilt ähnliches auch für $k(\sqrt{D})$.[4]) Wenn dies umgekehrt der Fall ist, so sind für $k(\sqrt{-D})$ entweder alle geraden Invarianten durch 4 teilbar oder alle mit einer einzigen Ausnahme (und zwar je nachdem alle oder nicht alle Primfaktoren von D der Gestalt $8l \pm 1$ sind). Aus einer Arbeit[5]) von mir folgt ähnlich leicht dasselbe (ohne den Zusatz in den Klammern) samt der Bemerkung[4]) auch für 8 statt 4. Diese Sätze über die durch 4 teilbaren Invarianten lassen sich auf Grund einer Arbeit[6]) von mir bedeutend erweitern, worauf ich an einer anderen Stelle eingehen will. Auch über die durch 8 teilbaren Invarianten läßt sich mit Hilfe der Arbeit[5]) mehr aussagen. Nach einer neueren Arbeit[7]) von mir kann man hoffen, daß sich weitere Zusammenhänge zwischen den 2-Klassengruppen von $k(\sqrt{D})$ und $k(\sqrt{-D})$ herausstellen mit Einbeziehung aller Invarianten 2^n, oder sogar zwischen den p-Klassengruppen (p Primzahl) von anderen Paaren geeigneter algebraischer Zahlkörper. Für $p \neq 2$ gibt es in dieser Richtung meines Wissens nur den folgenden Satz von SCHOLZ[8]). Unter den Klassengruppen von zwei quadratischen Zahlkörpern $k(\sqrt{d})$, $k(\sqrt{-3d})$ hat die des imaginären Körpers ebensoviel oder um 1 mehr durch 3 teilbare Invarianten als die des reellen.

(Eingegangen am 31. März 1944.)

[4]) Das gilt allgemeiner für das Körperpaar $k(\sqrt{d})$, $k(\sqrt{d_1})$, wenn $d = d_1 d_2$ und d, d_1, d_2 Diskriminantenzahlen sind.

[5]) L. RÉDEI, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper, I, *Journ. f. Math.*, **180** (1938), S. 1—43.

[6]) L. RÉDEI, Über die D-Zerfällungen zweiter Art, *Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. ung. Akad.*, **56** (1937), S. 89—125. (Ungarisch.)

[7]) L. RÉDEI, Über die Klassengruppen und Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, *Journ. f. Math.*, **186** (1944), S. 80—90.

[8]) A. SCHOLZ, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, *Journ. f. Math.*, **166** (1932), S. 201—203.

Über einige merkwürdige Polynome in endlichen Körpern mit zahlentheoretischen Beziehungen.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Herrn Prof. Michael Bauer, meinem verehrten Lehrer, zum 70. Geburtsjahre gewidmet.

Gegeben sei ein endlicher Primkörper P von der Charakteristik p ($\geqq 3$) und eine natürliche Zahl n. Wir werden gewisse Polynome (einer Variablen) in P untersuchen. Dabei ziehen wir manchmal auch den (endlichen) Erweiterungskörper Q mit der Elementenzahl

(1) $$q = p^n$$

in Betracht. (Für $n = 1$ ist $Q = P$.) Alle unsere Feststellungen über P lassen sich natürlich in die Kongruenzsprache umsetzen und erhalten dadurch einen einfachen zahlentheoretischen Sinn. Hierüber werden wir näheres bemerken dort, wo das für nötig erscheint. Den Körper der absolut rationalen Zahlen bezeichnen wir mit R. Wie das üblich ist, sollen die Symbole $0, 1, \ldots, p-1$, also allgemeiner die für p ganzen, rationalen Zahlen, auch die Elemente von P bezeichnen. Hiedurch könnte ein Mißverständnis entstehen, wir verabreden uns aber, daß „rationale Zahlen" (insbesondere Polynome und Potenzreihen mit solchen Koeffizienten) in P zu deuten sind, und nur dann in R, wenn es ausdrücklich gesagt oder augenscheinlich wird.

Wir wollen auf die bekannte Tatsache hinweisen, daß in Q keine weiteren Funktionen als die Polynome existieren, und zwar ist das durch die Interpolationsformel

(2) $$\sum_{a \text{ in } Q} a' [1 - (x-a)^{q-1}]$$

gelieferte Polynom das einzige vom Grade $< q$, das die allgemeinste eindeutige Funktion $a \to a'$ von einer Variablen in Q realisiert. [In Q sind „alle Polynome" (von beliebigem Grad) ein durchaus umfassenderer Begriff als „alle Funktionen".]. Kein Wunder, daß in den endlichen Körpern den Polynomen ein hohes Interesse zukommt.

Die Theorie der Polynome in Q ist in mehrerer Hinsicht vielgestalteter und schwieriger als in R oder im Körper der komplexen

Zahlen. (Das ist wohl dem Umstand zuzuschreiben, daß man in Q über Teilbarkeit, Anordnung und Bewertung nicht sprechen kann.) So ist unter anderem eine Besonderheit in Q, daß ein Polynom kein Quadrat zu sein braucht, wenn sein Wertevorrat aus lauter Quadratelementen besteht[1]). Vielmehr gibt es nach (2) offenbar $\left(\frac{q+1}{2}\right)^q$ Polynome der letzteren Art und vom Grade $<q$, darunter aber nur $\frac{1}{2}(q^{\frac{q+1}{2}}+1)$ also für großes q wesentlich weniger Quadratpolynome. Z. B. nehmen die Polynome

$$1+x^2+2x^{\frac{q+1}{2}},\quad 2x^2(1+x^{\frac{q-1}{2}})$$

nur Quadratelemente an, ohne selbst Quadratpolynome zu sein.

Nunmehr setzen wir in P

$$\Phi_{++}(x)=\frac{1}{2}\left[1+x^{\frac{q+1}{2}}+(1-x)^{\frac{q+1}{2}}\right], \tag{3}$$

$$\Phi_{+-}(x)=\frac{2}{x}\left[1+x^{\frac{q+1}{2}}-(1-x)^{\frac{q+1}{2}}\right], \tag{4}$$

$$\Phi_{-+}(x)=\frac{1}{2(1-x)}\left[1-x^{\frac{q+1}{2}}+(1-x)^{\frac{q+1}{2}}\right], \tag{5}$$

$$\Phi_{--}(x)=\frac{2}{x(1-x)}\left[1-x^{\frac{q+1}{2}}-(1-x)^{\frac{q+1}{2}}\right]. \tag{6}$$

Man sieht gleich, daß diese (ganzen) Polynome normiert sind, d. h. ihr konstantes Glied 1 ist[2]). Übrigens lassen sie sich in einer Formel so angeben:

$$\Phi_{\varrho\sigma}(x)=2^{-\sigma}x^{\frac{\sigma-1}{2}}(1-x)^{\frac{\varrho-1}{2}}\left[1+\varrho x^{\frac{q+1}{2}}+\sigma(1-x)^{\frac{q+1}{2}}\right]\quad (\varrho,\sigma=\pm 1).\text{[3])} \tag{7}$$

---

[1]) Besteht aber der Wertevorrat eines Polynoms $f(x)$ in R aus lauter Quadratelementen, so ist es ein Quadratpolynom in R, da nämlich der Annahme nach das Polynom $y^2-f(x)$ von x, y für jedes x in R reduzibel ist, und so ist es nach HILBERT selbst reduzibel.

[2]) Die Polynome (3)—(6) lassen sich mit folgender einfacher Vorschrift definieren. Man gehe aus dem einzigen Polynom $(1-x)^{\frac{q+1}{2}}$ aus, streiche oder verdoppele die äußeren Glieder $1, \pm x^{\frac{q+1}{2}}$ voneinander unabhängig, streiche in den erhaltenen vier Polynomen die etwaigen Faktoren $x, 1-x$, und normiere sie. So entstehen (3)—(6). — Aus inneren Gründen wäre richtiger gewesen, die Reihenfolge der rechten Seiten in (3)—(6) umzukehren und ebenso später unten in (8)—(11). Das hätte nämlich insbesondere zur Folgerung, daß in (30) sich ϱ, σ für $-\varrho, -\sigma$ schreiben ließe. Obigen Bezeichnungen haben wir aus formalen Gründen den Vorzug gegeben.

[3]) Statt der Indizes ϱ, σ geben wir oft nur das Vorzeichen an, wie auch schon in (3)—(6).

Andererseits betrachten wir die folgenden größten gemeinschaftlichen Teiler in P:

$$\varphi_{++}(x) = (1 + x^{\frac{q-1}{2}},\ 1 + (1-x)^{\frac{q-1}{2}}), \tag{8}$$

$$\varphi_{+-}(x) = (1 + x^{\frac{q-1}{2}},\ 1 - (1-x)^{\frac{q-1}{2}}), \tag{9}$$

$$\varphi_{-+}(x) = (1 - x^{\frac{q-1}{2}},\ 1 + (1-x)^{\frac{q-1}{2}}), \tag{10}$$

$$\varphi_{--}(x) = (1 - x^{\frac{q-1}{2}},\ 1 - (1-x)^{\frac{q-1}{2}}), \tag{11}$$

die wir ebenfalls gleich als normierte Polynome annehmen, wodurch sie eindeutig bestimmt sind[4]). In einer Formel vereinigt:

$$\varphi_{\varrho\sigma}(x) = (1 + \varrho x^{\frac{q-1}{2}},\ 1 + \sigma(1-x)^{\frac{q-1}{2}}). \tag{12}$$

In den folgenden werden wir uns hauptsächlich mit diesen Polynomquadrupeln (3)—(6), (8)—(11) beschäftigen. Unser bemerkenswertestes Resultat ist die Bestimmung der größten gemeinschaftlichen Teiler (8)—(11) [Sätze 4, 8] und hiedurch zugleich die Faktorenzerlegungen in Satz 5. Auf eine nähere Beschreibung des Inhalts dieser Arbeit verzichten wir hier, verweisen aber hierfür auf die an die Sätze gefügten Fußbemerkungen und auf die Bemerkung am Schluß der Arbeit.

Satz 1. *Der Wertevorrat von $\Phi_{\varrho\sigma}(x)$ in Q besteht aus lauter Quadratelementen. Und zwar ist $\Phi_{\varrho\sigma}(0) = 1$, $\Phi_{\varrho\sigma}(1) = 2^{\varrho-\sigma}$, und für ein $x \neq 0, 1$ ist der Wert von $\Phi_{\varrho\sigma}(x)$ aus folgender Tabelle zu entnehmen, wobei $\chi(x)$ den quadratischen Charakter in Q bezeichnet:*[5])

(13)

$\chi(x)$ $\chi(1-x)$	$+$ $+$	$+$ $-$	$-$ $+$	$-$ $-$
$\Phi_{++}(x)$	1	x	$1-x$	0
$\Phi_{+-}(x)$	4	$\frac{4}{x}$	0	$\frac{4(1-x)}{x}$
$\Phi_{-+}(x)$	1	0	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{1-x}$
$\Phi_{--}(x)$	0	$\frac{4}{x}$	$\frac{4}{1-x}$	$\frac{4}{x(1-x)}$

---

[4]) Diese Polynome (8)—(11) habe ich für $q = p$ auch schon in einer früheren (ungarischen) Arbeit „Eine Anwendung der hypergeometrischen Reihen auf eine Faktorenzerlegung des Fermatschen Polynoms $1 - x^{p-1}$ im Zusammenhang mit der Theorie der quadratischen Reste, *Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. ung. Akad.* (im Erscheinen)" untersucht und für sie einige der hiesigen Resultate festgestellt. — Legte man R statt P zu Grunde, so wäre $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ leicht angebbar, und zwar gleich 1 oder $1 - x + x^2$.

[5]) D. h. $\chi(0) = 0$ und $\chi(x) = 1$ oder -1 $(x \neq 0)$, je nachdem x ein Quadratelement ist oder nicht. Im Fall $q = p$ ist $\chi(x)$ im wesentlichen das Symbol $\left(\frac{x}{p}\right)$ von Legendre. — In obiger Tabelle geben wir von $\chi(x)$ und $\chi(1-x)$ nur das Vorzeichen an.

Satz 2. *Die $\Phi_{\varrho\sigma}(x)$ sind Polynomquadrate in P und zwar ist*

$$\Phi_{\varrho\sigma}(x) = \varphi^2_{\varrho\sigma}(x) \qquad (\varrho, \sigma = \pm 1).\text{[6]} \tag{14}$$

Satz 3. *Bezeichne $n_{\varrho\sigma}$ den Grad von $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$. Es ist*

$$n_{++} = \frac{q-\varepsilon}{4}, \; n_{+-} = n_{-+} = \frac{q-\varepsilon}{4} - \frac{1-\varepsilon}{2}, \; n_{--} = \frac{q-\varepsilon}{4} - 1, \tag{15}$$

oder in einer Formel

$$n_{\varrho\sigma} = \frac{1}{4}(q - 2 + \varrho + \sigma - \varepsilon\varrho\sigma), \tag{15'}$$

wobei

$$\varepsilon = \chi(-1) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}.\text{[7]} \tag{16}$$

Zum folgenden nehmen wir die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{\gamma \,.\, 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \,.\, \beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \,.\, 2!} x^2 + \dots$$

zu Hilfe. Wie es schon GAUSS[8]) bemerkt hat, ist insbesondere

$$F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x\right) = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}[(1+\sqrt{x})^\nu + (1-\sqrt{x})^\nu] = 1 + \sum \binom{\nu}{2k} x^k,$$

$$F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, 1 - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, x\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2\nu\sqrt{x}}[(1+\sqrt{x})^\nu - (1-\sqrt{x})^\nu] = 1 + \frac{1}{\nu} \sum \binom{\nu}{2k+1} x^k,$$

wobei für $k = 1, 2, \dots$ zu summieren ist. Man setze zuerst $\nu = \frac{1}{2}$, dann $\nu = -\frac{1}{2}$, und bezeichne die entstandenen Funktionen so:

$$F_{++}(x) = F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}], \tag{19}$$

$$F_{+-}(x) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, x\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}[(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}], \tag{20}$$

---

[6]) Alles was wir im folgenden über $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ aussagen, ist kraft (14) auch für $\Phi_{\varrho\sigma}(x)$ verwertbar.

[7]) Also ist $\varepsilon = 1$ oder -1, je nachdem $q \equiv 1$ oder $-1 \pmod 4$ ist.

[8]) GAUSS, Werke, 3 (1870), S. 127. Vgl. auch H. A. SCHWARZ, Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt, *Journ. f. Math.*, 75 (1873), S. 292–335. Übrigens lassen sich (17) und (18) leicht unmittelbar verifizieren.

$$(21)\quad F_{-+}(x)=F\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},x\right)=\quad\frac{1}{2}[(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}+(1-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}],$$

$$(22)\quad F_{--}(x)=F\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{3}{2},x\right)=-\frac{1}{\sqrt{x}}[(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}-(1-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}].$$

Wieder in einer Formel vereinigt:

$$(23)\quad F_{\varrho\sigma}(x)=2^{-\frac{1+\sigma}{2}}(\sqrt{x})^{\frac{\sigma-1}{2}}(\sqrt{1-x})^{\frac{\varrho-1}{2}}[(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}+\sigma(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}].$$

Man rechnet leicht nach, daß folgende Reihenentwicklungen gelten:

$$(24)\quad F_{++}(x)=1+\sum\binom{\frac{1}{2}}{2k}x^k=1-\sum\frac{4(4k-3)!}{(2k-2)!\,(2k)!}\left(\frac{x}{16}\right)^k,$$

$$(25)\quad F_{+-}(x)=1+2\sum\binom{\frac{1}{2}}{2k+1}x^k=1+\sum\frac{2(4k-1)!}{(2k-1)!\,(2k+1)!}\left(\frac{x}{16}\right)^k,$$

$$(26)\quad F_{-+}(x)=1+\sum\binom{-\frac{1}{2}}{2k}x^k=1+\sum\frac{2(4k-1)!}{(2k-1)!\,(2k)!}\left(\frac{x}{16}\right)^k,$$

$$(27)\quad F_{--}(x)=1-2\sum\binom{-\frac{1}{2}}{2k+1}x^k=1+\sum\frac{(4k+1)!}{(2k)!\,(2k+1)!}\left(\frac{x}{16}\right)^k.$$

Satz 4. *Es ist* $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ *eine Partialsumme von* $F_{\varrho\sigma}(x)$ $[\varrho,\sigma=\pm 1]$.[9])

Satz 5. *In* P *gelten die Faktorenzerlegungen*

$$(28)\quad 1+x^{\frac{q-1}{2}}=\varphi_{++}(x)\,\varphi_{+-}(x),\qquad 1-x^{\frac{q-1}{2}}=(1-x)\,\varphi_{-+}(x)\,\varphi_{--}(x),$$

zugleich also auch

$$(29)\quad 1-x^{q-1}=(1-x)\,\varphi_{++}(x)\,\varphi_{+-}(x)\,\varphi_{-+}(x)\,\varphi_{--}(x).^{10)}$$

---

[9]) Satz 4 mit (15) zusammen bestimmt die Polynome $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ auf Grund der Reihenentwicklungen (24)—(27) vollkommen mit explizit angegebenen Koeffizienten (diese sind natürlich in P aufzufassen). [Vgl. hierzu [13]).] Hierdurch wurde mit Vorwegnahme der Sätze 5 und 6 viererlei geleistet, und zwar wurde nach (14) die Quadratwurzel aus den Polynomen (3)—(6) ausgezogen, die größten gemeinschaftlichen Teiler (8)—(11), also auch die elementarsymmetrischen Funktionen der Elemente a in (30) bestimmt, und die (effektiven) Faktorenzerlegungen (28), (29) bewirkt. Man kann sagen, daß es sich in allem diesem um eine Eigenschaft der Potenzreihen (24)—(27) handelt. Dabei ist am auffälligsten, das besonders betont werden soll, daß die zu allen Paaren p, n gehörenden zweimal unendlich vielen Polynomquadrupel (8)—(11) [die ja obendrein in den verschiedenen Primkörpern P erklärt sind] aus einer gemeinsamen Quelle entstehen, nämlich (kurz gesagt) als Partialsummen von vier festen Potenzreihen.

[10]) Uns waren bisher nur die folgenden Faktorenzerlegungen des „Fermatschen" Polynoms $1-x^{q-1}$ bekannt:

$$\prod_{a\,(\neq 0)\text{ in }Q}(1-ax)\qquad(1-x^m)(1+x^m+x^{2m}+\ldots+x^{q-1-m})\quad[m\,|\,q-1].$$

Hieraus folgt, daß die $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ in Q in lauter verschiedene lineare Faktoren zerfallen.

Satz 6. *Die Nullstellen von $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ sind die Elemente a in Q mit*

$$\chi(a)=-\varrho,\ \chi(1-a)=-\sigma.\text{[11]} \tag{30}$$

Satz 7. *Das Verhalten von $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ bei Ausübung der Elemente der anharmonischen Gruppe auf x ist durch die Formeln*

$$\varphi_{++}(1-x)=\chi(2)\varphi_{++}(x),\quad x^{n_{++}}\varphi_{++}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{3+\varepsilon}\varphi_{+,-\varepsilon}(x); \tag{31}$$

$$\varphi_{+-}(1-x)=2\chi(2)\varphi_{-+}(x),\quad x^{n_{+-}}\varphi_{+-}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{3-\varepsilon}\varphi_{+,\varepsilon}(x); \tag{32}$$

$$\varphi_{-+}(1-x)=\frac{1}{2}\chi(2)\varphi_{+-}(x),\quad x^{n_{-+}}\varphi_{-+}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{-1+3\varepsilon}\varphi_{-,\varepsilon}(x); \tag{33}$$

$$\varphi_{--}(1-x)=-\chi(2)\varphi_{--}(x),\quad x^{n_{--}}\varphi_{--}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{1+3\varepsilon}\varphi_{-,-\varepsilon}(x) \tag{34}$$

angegeben.[12])

Satz 8. *Definiert man die Polynome $A(x)$, $B(x)$ in P durch*

$$[(1+z)(1+z^p)(1+z^{p^2})\dots(1+z^{p^{n-1}})]^{\frac{p-1}{2}}=A(z^2)+zB(z^2), \tag{35}$$

so gilt

$$\varphi_{++}(x)=A(x)+xB(x), \tag{36}$$

$$\varphi_{+-}(x)=2[A(x)+B(x)], \tag{37}$$

$$\varphi_{-+}(x)=A(x), \tag{38}$$

$$\varphi_{--}(x)=-2B(x).\text{[13]} \tag{39}$$

---

[11]) Insbesondere für $n=1$ entsprechen den vier Paaren ϱ, σ in der Theorie der Verteilung der quadratischen Reste die vier Arten sogenannter zweigliedriger Sequenzen. [Man schreibe die zweite Gleichung (30) in der Form $\chi(a-1)=-\varepsilon\sigma$.] Somit enthält (15) den Satz von LAGRANGE über die Anzahl dieser Sequenzen als Nebenresultat. — Nach den bisherigen beherrscht man die zweigliedrigen Sequenzen durch die obigen hypergeometrischen Reihen. Ähnliches erwartet man für die dreigliedrigen Sequenzen nicht mehr [hierzu müßte man die acht größten gemeinschaftlichen Teiler

$$\left(1\pm x^{\frac{p-1}{2}},\ 1\pm(1+x)^{\frac{p-1}{2}},\ 1\pm(2+x)^{\frac{p-1}{2}}\right)$$

bestimmen], da deren Theorie unvergleichbar schwieriger ist. Merkwürdigerweise treten schon bei der Bestimmung der Anzahl der dreigliedrigen Sequenzen wieder hypergeometrische Reihen auf, die aber keine algebraischen Funktionen sind. An einer anderen Stelle möchte ich hierauf zurückkommen.

[12]) Es ist $\chi(2)=1$ für $q\equiv\pm1 \pmod 8$ und $\chi(2)=-1$ für $q\equiv\pm3 \pmod 8$. — Nach (31)—(34) bewirken die Substitutionen $x\to1-x$, $x\to\frac{1}{x}$ im wesentlichen eine Permutation der $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$, die auch von (30) abzulesen ist.

[13]) Im Satz 8 ist weiter nichts neues geschehen, als daß wir die im Satz 4 genannten Partialsummen von $F_{\varrho\sigma}(x)$ [im Körper P] berechnet haben; das sind die

Satz 9. *Die Faktorenzerlegung* (29) *von* $1-x^{q-1}$ *läßt sich ein wenig verfeinern, und zwar zerfällt* $\varphi_{--}(x)$ *im Fall* $q\equiv 1 \pmod 4$ *in zwei Faktoren, die die Partialsummen der hypergeometrischen Reihen*

$$(40)\qquad \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{4}}+(1-\sqrt{x})^{-\frac{1}{4}}\right]=1+\sum\binom{-\frac{1}{4}}{2k}x^k,$$

$$(41)\qquad -\frac{2}{\sqrt{x}}\left[(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{4}}-(1-\sqrt{x})^{-\frac{1}{4}}\right]=1-4\sum\binom{-\frac{1}{4}}{2k+1}x^k$$

vom Grad $\mathcal{E}\left(\frac{q-1}{8}\right)$[14]) *bzw.* $\mathcal{E}\left(\frac{q-5}{8}\right)$ *sind, und* $\varphi_{+-}(x)$ *zerfällt im Fall* $q\equiv -1 \pmod 4$ *ebenfalls in zwei Faktoren, die die Partialsummen von*

$$(42)\qquad \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}+(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}\right]=1+\sum\binom{\frac{1}{4}}{2k}x^k,$$

$$(43)\qquad \frac{2}{\sqrt{x}}\left[(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}-(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}\right]=1+4\sum\binom{\frac{1}{4}}{2k+1}x^k$$

vom Grad $\mathcal{E}\left(\frac{q+1}{8}\right)$ *bzw.* $\mathcal{E}\left(\frac{q-3}{8}\right)$ *sind.*[15])

Satz 10. *Es sind im Fall* $q\equiv\pm 1 \pmod 8$

$$(44)\qquad \frac{1}{2}[1+\varphi_{++}(x)],\quad \frac{8}{x(1-x)}[1-\varphi_{++}(x)],$$

im Fall $q\equiv\pm 3 \pmod 8$ *aber*

$$(45)\qquad \frac{1}{2(1-x)}[1+\varphi_{++}(x)],\quad \frac{8}{x}[1-\varphi_{++}(x)]$$

---

(36)–(39). — Der Grad der linken Seite von (35) ist $\frac{1}{2}(p^n-1)$, die Anzahl der Entwicklungsglieder bloß $\left(\frac{p+1}{2}\right)^n$ [diese sind aber auch schon alle $\neq 0$ in P]. Hiermit ist dieses Polynom für $n\geqq 2$ lückenhaft und die Lückenhaftigkeit steigert sich für wachsendes n stark. Dies überträgt sich kraft (35) auf $A(x)$ und $B(x)$, und dann weiter nach (36)—(39) auf die $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$. [Für die Reihen (24)–(27) folgt aus Satz 4, daß die natürliche Dichte der mod p nichtverschwindenden Koeffizienten Null ist.]

[14]) Für reelles x bedeutet $\mathcal{E}(x)$ die größte ganze Zahl $\leqq x$.

[15]) Folglicherweise zerfallen auch die hier angegebenen Polynome in Q in lauter verschiedene Linearfaktoren. Es ist uns nicht gelungen die Nullstellen dieser Polynome näher zu bestimmen. Obige hypergeometrische Reihen sind die Fälle $\nu=\pm\frac{1}{4}$ von (17), (18).

(ganze) normierte Quadratpolynome in P. In beiden Fällen ist das Produkt der genannten zwei Polynome gleich $\varphi_{--}^2(x)$.[16])

Satz 11. *Es ist*

$$f(x)=\frac{1+\frac{x}{2}\varphi_{+-}(x^2)}{1+\chi(2)\,x} \tag{46}$$

ein (ganzes) normiertes Quadratpolynom in P. Zugleich gilt

$$f(x)f(-x)=\varphi_{-+}^2(x^2).^{17)} \tag{47}$$

Satz 12. *Für* $p\geqq 5$ *sind*

$$\frac{1}{2}\,[1+3x+(3x^2+x^3)\,x^{\frac{q-3}{2}}+(1-x)^{\frac{q+3}{2}}], \tag{48}$$

$$\frac{2}{9x}\,[1+3x+(3x^2+x^3)\,x^{\frac{q-3}{2}}-(1-x)^{\frac{q+3}{2}}], \tag{49}$$

$$\frac{1}{2(1-x)^3}\,[1+3x-(3x^2+x^3)\,x^{\frac{q-3}{2}}+(1-x)^{\frac{q+3}{2}}], \tag{50}$$

$$\frac{2}{9x(1-x)^3}\,[1+3x-(3x^2+x^3)\,x^{\frac{q-3}{2}}-(1-x)^{\frac{q+3}{2}}] \tag{51}$$

(ganze) normierte Quadratpolynome in P.[18])

Beweis.[19]) Für jedes x in Q ist

$$\chi(x)=x^{\frac{q-1}{2}}; \tag{52}$$

diese Gleichung ist so zu verstehen, daß man den Wert 0, 1 bzw. —1 der linken Seite in Q deutet. Nach diesem ist für jedes x in Q

---

[16]) Die Quadratwurzeln der Polynome (44), (45) liefern also eine Faktorenzerlegung von $\varphi_{--}(x)$, die von der im Satz 9 für den Fall $q\equiv 1 \pmod 4$ angegebenen verschieden ist. Diese Quadratwurzeln und die Nullstellen konnten wir aber nicht näher bestimmen.

[17]) Man sieht, daß $f(x)$ in Q in lauter zweifache Linearfaktoren zerfällt, auch die Nullstellen sind bis auf das Vorzeichen leicht anzugeben. Die Quadratwurzel von $f(x)$ konnten wir wieder nicht bestimmen.

[18]) Abweichend von den bisherigen Sätzen handelt es sich im Satz 12 nicht mehr um die $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$. — Es wäre leicht zu beweisen, daß die Quadratwurzeln aus (48)—(51) wieder Partialsummen von (17) und (18) für $\nu=\frac{3}{2}$ und $\nu=-\frac{3}{2}$ sind. Satz 12 würde sich leicht verallgemeinern lassen entsprechend den Fällen $\nu=\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2},\ldots$ Da wir in Satz 12 weniger Interesse erblicken als in den vorangehenden, wollten wir ihn und werden auch seinen Beweis möglichst kurz fassen.

[19]) Den etwas mühsamen Beweis der Sätze 4, 8, 9 lassen wir erst am Ende folgen, nehmen aber Satz 4 beim Beweis der Sätze 7, 10, 11 vorweg.

$$\Phi_{++}(x) = \frac{1}{2}[1 + \chi(x)x + \chi(1-x)(1-x)],$$

und für die übrigen $\Phi_{\varrho\sigma}(x)$ gilt ähnliches. Hieraus folgt Satz 1 leicht.

Man sieht, daß einerseits die $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ andererseits die $\Phi_{\varrho\sigma}(x)$ paarweise teilerfremd sind, und daß $\varphi_{\varrho\sigma}(x) \mid \Phi_{\varrho\sigma}(x)$ ist. Weiter ist dann nach (12):

$$\varphi_{+,\sigma}(x)\,\varphi_{-,\sigma}(x) = (1-x^{q-1},\ 1+\sigma(1-x)^{\frac{q-1}{2}}),$$

(53) $$\prod_{\varrho,\sigma=\pm 1} \varphi_{\varrho\sigma}(x) = (1-x^{q-1},\ 1-(1-x)^{q-1}) = \frac{1-x^{q-1}}{1-x},$$

da

$$1-(1-x)^{q-1} = 1 - \frac{(1-x)^q}{1-x} = 1 - \frac{1-x^q}{1-x} = -x\frac{1-x^{q-1}}{1-x}$$

ist. Ähnlich aber noch leichter berechnet man aus (3)—(6):

$$\prod_{\varrho,\sigma=\pm 1} \Phi_{\varrho\sigma}(x) = \left(\frac{1-x^{q-1}}{1-x}\right)^2.$$

Vergleicht man dies mit (53), so entsteht nach obigen Bemerkungen (14), d. h. auch Satz 2.

Von (3)—(6) liest man leicht ab, daß der Grad der Reihe nach das doppelte der Zahlen (15) ist. Hieraus und aus (14) folgt Satz 3.

Im Satz 5 ist (29) nichts anderes als (53). Aus (29) folgen aber auch die Gleichungen (28), da in diesen nach (8)—(11) die linke Seite durch die Faktoren der rechten Seite teilbar ist. Also ist Satz 5 richtig.

Nach (52) ist klar, daß jedes a in (30) eine Nullstelle von $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ ist. Andererseits erschöpfen die zu allen Paaren ϱ, σ gehörenden a die Elemente $\neq 0, 1$ von Q, deren Anzahl $q-2$ gleich der Summe der Grade der $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ ist. Hieraus folgt Satz 6.

Um Satz 7 zu beweisen zeigen wir zuerst:

(54) $$\varphi_{++}(x) = 1 + \ldots + \frac{2}{3+\varepsilon}\,x^{n_{++}},$$

(55) $$\varphi_{+-}(x) = 1 + \ldots + \frac{4}{3-\varepsilon}\,x^{n_{+-}},$$

(56) $$\varphi_{-+}(x) = 1 + \ldots + \frac{2}{-1+3\varepsilon}\,x^{n_{-+}},$$

(57) $$\varphi_{--}(x) = 1 + \ldots + \frac{4}{1+3\varepsilon}\,x^{n_{--}}.$$

Ursprünglich wären nämlich die letzten Koeffizienten nach Satz 4 [19]) und (15):

$$\binom{\frac{1}{2}}{\frac{q-\varepsilon}{2}},\ 2\binom{\frac{1}{2}}{\frac{q+\varepsilon}{2}},\ \binom{-\frac{1}{2}}{\frac{q-2+\varepsilon}{2}},\ -2\binom{-\frac{1}{2}}{\frac{q-2-\varepsilon}{2}}.$$

In den Binomialkoeffizienten läßt sich der Zähler $\pm\frac{1}{2}$ durch $\frac{q\pm 1}{2}$ ersetzen, und dann gehen sie durch die Umformung $\binom{u}{v}=\binom{u}{u-v}$ in

$$\binom{\frac{q+1}{2}}{\frac{1+\varepsilon}{2}}=\frac{2}{3+\varepsilon},\ \binom{\frac{q+1}{2}}{\frac{1-\varepsilon}{2}}=\frac{2}{3-\varepsilon},\ \binom{\frac{q-1}{2}}{\frac{1-\varepsilon}{2}}=\frac{2}{-1+3\varepsilon},\ \binom{\frac{q-1}{2}}{\frac{1+\varepsilon}{2}}=\frac{-2}{1+3\varepsilon}$$

über, wodurch (54)—(57) bewiesen ist.

Aus (30) folgt, daß einerseits

$$\varphi_{\varrho\sigma}(1-x) \text{ und } \varphi_{\sigma\varrho}(x) \tag{58}$$

andererseits wegen

$$\chi\left(\frac{1}{a}\right)=-\varrho,\quad \chi\left(1-\frac{1}{a}\right)=\varepsilon\varrho\sigma$$

auch

$$x^{n_{\varrho\sigma}}\varphi_{\varrho\sigma}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ und } \varphi_{\varrho,-\varepsilon\varrho\sigma}(x) \tag{59}$$

assoziiert sind. Die Polynompaare in (58), (59) sind eben die in den Gleichungen (31)—(34) von den rechtsseitigen konstanten Faktoren abgesehen. Weiter liest man von (54)—(57) leicht ab, daß unter den Gleichungen (31)—(34) in den vorderen die Koeffizienten der Glieder höchsten Grades, in den hinteren aber die konstanten Glieder gleich sind. Dabei (beim ersteren) ist nämlich zu berücksichtigen, daß nach (15)

$$(-1)^{n_{++}}=\chi(2),\ (-1)^{n_{+-}}=(-1)^{n_{-+}}=\varepsilon\chi(2),\ (-1)^{n_{--}}=-\chi(2)$$

ist. Damit haben wir Satz 7 bewiesen.

Für Satz 10 beweisen wir zuerst, daß (44), (45) ganze Polynome sind. Diese Behauptung ist gleichwertig mit $\varphi_{++}(0)=1$, $\varphi_{++}(1)=\chi(2)$ [vgl.[12]]. Die erste Gleichung sagt nichts anderes, als daß $\varphi_{++}(x)$ normiert ist; die zweite folgt dann aus der ersten Gleichung in (31).

Weiter gewinnen wir aus (3) und (6):

$$4\Phi_{++}(x)+x(1-x)\,\Phi_{--}(x)=4$$

d. h. nach (14)

$$4[1+\varphi_{++}(x)][1-\varphi_{++}(x)]=x(1-x)\,\varphi_{--}^{2}(x).$$

Man sieht hieraus, daß das Produkt der Polynome (44) bzw. (45) in der Tat $\varphi_{--}^{2}(x)$ ist. Da beidesmal die Faktoren teilerfremd sind, so sind sie auch Quadratpolynome. Endlich sind sie auch normiert, da dies für die vorderen Polynome in (44), (45) klar ist und das gleiche auch für $\varphi_{--}(x)$ gilt. Damit haben wir Satz 10 bewiesen.

Zu Satz 11 zeigen wir zunächst, daß $f(x)$ in (46) ein ganzes Polynom ist. Da der lineare Nenner die Nullstelle $x = -\chi(2)$ hat, so ist nur zu zeigen, daß für dieses x auch der Zähler verschwindet, d. h. $1-\frac{1}{2}\chi(2)\varphi_{+-}(1)=0$ ist. Letzteres folgt in der Tat aus $\varphi_{-+}(0)=1$ und der ersten Gleichung in (32).

Da nach (46) $f(x)$ normiert ist und $f(x)$, $f(-x)$ offenbar teilerfremd sind, brauchen wir nur noch (47) zu beweisen, woraus dann nämlich folgt, daß die Faktoren links Quadratpolynome sind. Nach (46) und (14) ist

$$f(x)f(-x)=\frac{1-\frac{x^2}{4}\Phi_{+-}(x^2)}{1-x^2}.$$

Andererseits folgt aus (4) und (5):

$$x\Phi_{+-}(x)+4(1-x)\Phi_{-+}(x)=4.$$

Aus beiden entsteht $f(x)f(-x)=\Phi_{-+}(x^2)$, d. h. wegen (14) auch (47). Also ist Satz 11 richtig.

Satz 12 ergibt sich so. Man prüft leicht nach, daß die Polynome (48)—(51) ganz und normiert sind. Dann bezeichne man diese Polynome der Reihe nach mit $\Psi_{++}(x)$, $\Psi_{+-}(x)$, $\Psi_{-+}(x)$, $\Psi_{--}(x)$. Offenbar ist

$$(60)\qquad \Psi_{\varrho,+}(x)\,\Psi_{\varrho,-}(x)=$$
$$=\frac{1}{9x}(1-x)^{3(\varrho-1)}\left[\left(1+3x+\varrho(3+x)x^{\frac{q+1}{2}}\right)^2-(1-x)^{q+3}\right].$$

Wegen $(1-x)^q=1-x^q$ berechnet sich der Ausdruck in [ ] leicht zu

$$x\left(3+x+\varrho(1+3x)x^{\frac{q-1}{2}}\right)^2.$$

Da hiernach die rechte Seite von (60) ein Polynomquadrat ist und nach (48), (49) bzw. (50), (51) die Faktoren der linken Seite teilerfremd sind, so sind sie nach obigem auch Polynomquadrate. Das beweist Satz 12.

Als Vorbereitung zum Beweis der Sätze 4, 8, 9 zeigen wir zuerst folgendes:

Ist a eine rationale für p ganze Zahl mit der p-adischen Entwicklung

$$(61)\qquad a=a_0+a_1p+a_2p^2+\dots\qquad (0\leqq a_i\leqq p-1;\ i=0,1,\dots),$$

so ist

$$(62)\qquad (1+x)^a=1+\sum\binom{a}{k}x^k=(1+x)^{a_0}(1+x^p)^{a_1}(1+x^{p^2})^{a_2}\dots,$$

wobei das zweite „=" in P zu deuten ist so nämlich, daß nach Ausmultiplizieren die entsprechenden Koeffizienten in P gleich sind. Mit anderen Worten, indem wir noch

(63) $k = k_0 + k_1 p + \ldots + k_e p^e \qquad (0 \leqq k_i \leqq p-1\,;\ i = 0, 1, \ldots, e)$

setzen, gilt in P:

$$\binom{a}{k} = \binom{a_0}{k_0}\binom{a_1}{k_1}\cdots\binom{a_e}{k_e}. \tag{64}$$

Betrachten wir nämlich die Partialsumme

$$S_l = 1 + \sum_{k=1}^{p^{l+1}-1}\binom{a}{k}x^k \qquad (l = 0, 1, \ldots) \tag{65}$$

der Potenzreihe in (62). Da nach (61)

$$a \equiv a_0 + a_1 p + \ldots + a_l p^l \pmod{p^{l+1}}$$

ist, gilt in P offenbar

$$S_l = 1 + \sum \binom{a_0 + a_1 p + \ldots + a_l p^l}{k} x^k, \tag{66}$$

wobei rechts nur formal eine unendliche Reihe steht, da die Koeffizienten für $k \geqq p^{l+1}$ sicher verschwinden. Es ist (66) nichts anderes als

$$S_l = (1+x)^{a_0 + a_1 p + \ldots + a_l p^l}.$$

Nun gilt in P die Regel $(u+v)^p = u^p + v^p$, woraus weiter folgt:

$$S_l = (1+x)^{a_0}(1+x^p)^{a_1}\ldots(1+x^{p^l})^{a_l}.$$

Da l beliebig groß sein darf, ist (62) richtig, womit die Behauptung bewiesen ist.

Jetzt beweisen wir Satz 4. Es gilt p-adisch

$$\pm\frac{1}{2} = \frac{p \pm 1}{2} + \frac{p-1}{2}p + \frac{p-1}{2}p^2 + \ldots, \tag{67}$$

woraus nach (64) folgt:

$$\binom{\pm\frac{1}{2}}{k} = \binom{\frac{p\pm 1}{2}}{k_0}\binom{\frac{p-1}{2}}{k_1}\cdots\binom{\frac{p-1}{2}}{k_e}. \tag{68}$$

Man bemerke gleich, daß dies in P verschwindet, wenn $\frac{1}{2}(p^{e+1} \pm 1) < k < p^{e+1}$ ist, da dann wegen

$$\frac{p \pm 1}{2} + \frac{p-1}{2}p + \ldots + \frac{p-1}{2}p^e = \frac{1}{2}(p^{e+1} \pm 1)$$

wenigstens ein k_i größer ist als die darüber stehende Zahl.

Betrachten wir in P die vier Koeffizientenfolgen in (24)—(27):

$$\binom{\frac{1}{2}}{2k};\ \binom{\frac{1}{2}}{2k+1};\ \binom{-\frac{1}{2}}{2k};\ \binom{-\frac{1}{2}}{2k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{69}$$

Die Glieder bzw. mit den Stellenzeigern

$$k = \frac{q+1}{2}, \frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2}, \frac{q-1}{2}$$

sind

$$\binom{\frac{1}{2}}{q+1}, \binom{\frac{1}{2}}{q}, \binom{-\frac{1}{2}}{q+1}, \binom{-\frac{1}{2}}{q}$$

d. h. nach (68):

(70) $$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}. \text{[20]}$$

Weiter betrachten wir auch die vier Partialfolgen von (69) bestehend aus den Gliedern, die jedesmal den eben geprüften Gliedern voranstehen (d. h. in denen $2k$ bzw. $2k+1 < q$ ist). In diesen endlichen Folgen verschwinden (in P) die Glieder bzw. mit $k >$

(71) $$\mathcal{E}\left(\frac{q+1}{4}\right), \mathcal{E}\left(\frac{q-1}{4}\right), \mathcal{E}\left(\frac{q-1}{4}\right), \mathcal{E}\left(\frac{q-3}{4}\right),$$

wie man das aus der Bemerkung bei (68) leicht sieht. Nach (15) ist aber (71) eben n_{++}, n_{+-}, n_{-+}, n_{--}.

All dies ergibt nach (24)—(27) in P (vgl.[20]):

(72) $$F_{\varrho\sigma}(x) = \{F_{\varrho\sigma}(x)\} - \varrho 2^{-1-\sigma} x^{\frac{q+\sigma}{2}} + \dots \qquad (\varrho, \sigma = \pm 1),$$

wobei $\{F_{\varrho\sigma}(x)\}$ die Partialsumme vom Grad $n_{\varrho\sigma}$ von $F_{\varrho\sigma}(x)$ ist. Da nach (15′) $2n_{\varrho\sigma} \leqq \frac{q+\sigma}{2}$ ist, folgt aus (72) nach Quadrieren

(73) $$F^2_{\varrho\sigma}(x) = \{F_{\varrho\sigma}(x)\}^2 - \varrho 2^{-\sigma} x^{\frac{q+\sigma}{2}} + \dots, \text{[21]}$$

wobei berücksichtigt werden mußte, daß $\{F_{\varrho\sigma}(x)\}$ das Anfangsglied **1** hat.

Andererseits ergibt (23):

(74) $$2^{\sigma} x^{\frac{1-\sigma}{2}} (1-x)^{\frac{1-\varrho}{2}} F^2_{\varrho\sigma}(x) = 1 + \sigma (1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Außerdem gilt in P offenbar

(75) $$(1-x)^{\frac{1}{2}} = (1-x)^{\frac{q+1}{2}} + \dots, \text{[22]}$$

wobei links die Potenzreihe zu nehmen ist.

[20]) Das entsprechende Glied von $F_{\varrho\sigma}(x)$ in (24)—(27) ist dann bzw. $-\frac{1}{4} x^{\frac{q+1}{2}}, -x^{\frac{q-1}{2}}, \frac{1}{4} x^{\frac{q+1}{2}}, x^{\frac{q-1}{2}}$ d. h. allgemein für alle vier Fälle: $-\varrho 2^{-1-\sigma} x^{\frac{q+\sigma}{2}}$.

[21]) Dies ist natürlich so zu lesen, daß die rechts nicht angeschriebenen Glieder von größerem Grade als $\frac{q+\sigma}{2}$ sind.

[22]) Wieder fehlen rechts nur Glieder vom Grad $> \frac{q+1}{2}$.

Wir setzen (73), (75) in (74) ein:

$$2^{\sigma} x^{\frac{1-\sigma}{2}}(1-x)^{\frac{1-\varrho}{2}}\{F_{\varrho\sigma}(x)\}^2-\varrho x^{\frac{q+1}{2}}(1-x)^{\frac{1-\varrho}{2}}+\ldots=1+\sigma(1-x)^{\frac{q+1}{2}}+\ldots,$$

und berücksichtigen beiderseits nur die Glieder vom Grad $\leqq\frac{q+1}{2}$. Da nach (15′) der Grad $\frac{1-\varrho}{2}+\frac{1-\sigma}{2}+2n_{\varrho\sigma}$ des ersten Produkts links $\leqq\frac{q+1}{2}$ ist, entsteht

$$2^{\sigma} x^{\frac{1-\sigma}{2}}(1-x)^{\frac{1-\varrho}{2}}\{F_{\varrho\sigma}(x)\}^2-\varrho x^{\frac{q+1}{2}}=1+\sigma(1-x)^{\frac{q+1}{2}}.$$

Dies mit (7) verglichen ergibt

$$\{F_{\varrho\sigma}(x)\}^2=\Phi_{\varrho\sigma}(x),$$

womit nach (14) Satz 4 bewiesen ist.

Satz 8 folgt so. Aus (62) und (67) ergibt sich in P

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=[(1+x)(1+x^p)(1+x^{p^2})\ldots]^{\frac{p-1}{2}}$$

und weiter hieraus nach (35) offenbar

$$(76)\qquad (1+x)^{-\frac{1}{2}}=A(x^2)+xB(x^2)+\ldots\,^{23)}$$

Da $A(x)$, $B(x)$ ebenfalls nach (35) bzw. vom Grade

$$(77)\qquad \mathcal{E}\left(\frac{q-1}{4}\right),\ \mathcal{E}\left(\frac{q-3}{4}\right)$$

sind, entsteht nach Multiplikation mit $1+x$ (vgl. [23])) auch noch

$$(78)\qquad (1+x)^{\frac{1}{2}}=(1+x)A(x^2)+(x+x^2)B(x^2)+\ldots$$

Wendet man (78) und (76) mit $\pm\sqrt{x}$ statt x an, so folgt aus (19)—(22):

$$\begin{aligned}F_{++}(x)&=A(x)+xB(x)+\ldots,\\ F_{+-}(x)&=2[A(x)+B(x)]+\ldots,\\ F_{-+}(x)&=A(x)+\ldots,\\ F_{--}(x)&=-2B(x)+\ldots\end{aligned}$$

Die Grade der rechts angeschriebenen Polynome sind nach (77) die Zahlen (71) d. h., wie schon bemerkt, eben die n_{++}, $n_{+-}, \ldots$ Diese Polynome sind also der Reihe nach die vier $\{F_{\varrho\sigma}(x)\}$, und somit folgt Satz 8 aus Satz 4.

Es ist nur noch übrig Satz 9 zu beweisen. Hierzu bezeichnen wir die Potenzreihen (40)—(43) mit $G_i(x)\,[i=1,\ldots,4]$. Wir betrachten

---

[23]) Die rechts fehlenden Glieder sind von höherem Grade als das Polynom auf der rechten Seite, sie sind sogar vom Grad $\geqq p^n\,(=q)$.

zuerst den Fall $q \equiv 1 \pmod 4$ und zeigen, daß dann in P

(79) $$G_1(x) = \{1 + \ldots + d\, x^{\mathscr{E}\left(\frac{q-1}{8}\right)}\} + e x^{\frac{q+1}{2}} + \ldots,$$

(80) $$G_2(x) = \{1 + \ldots + d' x^{\mathscr{E}\left(\frac{q-5}{8}\right)}\} + e' x^{\frac{q-1}{2}} + \ldots$$

ist, wobei $d, e, \ldots$ irgendwelche Konstanten sind.

Jetzt ist nämlich entweder $p \equiv 1 \pmod 4$ oder $p \equiv -1 \pmod 4$, $2 | n$. Entsprechend gilt p-adisch

$$-\frac{1}{4} = \frac{p-1}{4}(1 + p + p^2 + \ldots),$$

$$-\frac{1}{4} = \left(\frac{3p-1}{4} + \frac{p-3}{4} p\right)(1 + p^2 + p^4 + \ldots),$$

woraus nach (64) in P bzw.

$$\binom{-\frac{1}{4}}{k} = \binom{\frac{p-1}{4}}{k_0}\binom{\frac{p-1}{4}}{k_1}\ldots,$$

$$\binom{-\frac{1}{4}}{k} = \binom{\frac{3p-1}{4}}{k_0}\binom{\frac{p-3}{4}}{k_1}\binom{\frac{3p-1}{4}}{k_2}\ldots$$

folgt. Also hat das letzte in P nichtverschwindende Glied der Folge

$$\binom{-\frac{1}{4}}{1}, \ldots, \binom{-\frac{1}{4}}{q-1}$$

den Stellenzeiger

$$k = \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{4} p + \ldots + \frac{p-1}{4} p^{n-1}$$

bzw.

$$k = \left(\frac{3p-1}{4} + \frac{p-3}{4} p\right) + \ldots + \left(\frac{3p-1}{4} p^{n-2} + \frac{p-3}{4} p^{n-1}\right).$$

Da dies beidesmal $\frac{q-1}{4}$ ist, folgen (79), (80) leicht aus (40), (41).

Andererseits ist nach (40), (41), (22)

$$G_1(x)\, G_2(x) = F_{--}(x),$$

woraus nach (79), (80) mit Rücksicht auf (72) und Satz 4 leicht folgt, daß Satz 9 im jetzt betrachteten Fall richtig ist.

Im anderen Fall $q \equiv -1 \pmod 4$ ist $p \equiv -1 \pmod 4$, $2 \nmid n$. Es gilt p-adisch

$$\frac{1}{4} = \frac{p+1}{4} + \left(\frac{3p-1}{4} + \frac{p-3}{4} p\right)(p + p^3 + p^5 + \ldots).$$

Dies ergibt nach (64) ähnlich wie früher, daß in der Folge

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ q-1 \end{pmatrix}$$

der Stellenzeiger des letzten in P nichtverschwindenden Gliedes

$$k = \frac{p+1}{4} + \left(\frac{3p-1}{4} p + \frac{p-3}{4} p^2\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{3p-1}{4} p^{n-2} + \frac{p-3}{4} p^{n-1}\right) = \frac{q+1}{4}$$

ist. Hieraus und aus (42), (43) folgen

$$G_3(x) = \{1 + \ldots + d'' \, x^{\mathcal{E}\left(\frac{q+1}{8}\right)}\} + e'' \, x^{\frac{q+1}{2}} + \ldots,$$

$$G_4(x) = \{1 + \ldots + d''' x^{\mathcal{E}\left(\frac{q-3}{8}\right)}\} + e''' x^{\frac{q-1}{2}} + \ldots,$$

wobei d'', e'', ... irgendwelche Konstanten sind.

Andererseits ist nach (42), (43), (20)

$$G_3(x)\, G_4(x) = F_{+-}(x).$$

Man gewinnt ähnlich wie vorher, daß Satz 9 auch im vorliegenden Fall richtig ist.

Bemerkung. Es ist auffällig, wie viele Polynome mit sehr einfachen Koeffizienten in P sich finden ließen, aus denen man die Quadratwurzel ausziehen kann (Sätze 2, 10, 11, 12). Wir wollen die interessante Folgerung noch besonders hervorheben, daß für das Polynom $\Phi_{++}(x)$ in (3) nach den Sätzen 2 und 10 gilt: Es sind

$$\sqrt{2(1+\sqrt{\Phi_{++}(x)})}, \quad \sqrt{\frac{2(1-\sqrt{\Phi_{++}(x)})}{x(1-x)}} \quad [q \equiv \pm 1 \pmod 8]$$

bzw.

$$\sqrt{\frac{2(1+\sqrt{\Phi_{++}(x)})}{1-x}}, \quad \sqrt{\frac{2(1-\sqrt{\Phi_{++}(x)})}{x}} \quad [q \equiv \pm 3 \pmod 8]$$

rationale Polynome in P, wobei das Vorzeichen der inneren Quadratwurzel so gewählt wird, daß $\sqrt{\Phi_{++}(x)} = 1 + \ldots$ ist. — Es wäre leicht die Potenzsummen der a in (30) zu bestimmen. Wollte man aber hieraus mit Hilfe der Newtonschen Formeln die elementarsymmetrischen Funktionen der a, also die Polynome $\varphi_{\varrho\sigma}(x)$ bestimmen, so wäre das ein viel komplizierterer Weg. (Das war unser Verfahren in der Arbeit[4]).)

(Eingegangen am 2. Mai 1944).

Linienelementräume deren Zusammenhang durch eine beliebige Transformationsgruppe bestimmt ist.

Von O. VARGA in Debrecen.

Die durch die Übertragungslehre geschaffenen allgemeinen Räume machten es notwendig FELIX KLEINS berühmtes „Erlanger Programm“[1]) zu erweitern[2]). Diese Erweiterungen ermöglichten es, den Gruppenbegriff als geometrisches Klassifikationsprinzip beizubehalten.

Seit der Dissertation von P. FINSLER[3]) wurden die differentialgeometrischen Räume dadurch erneut verallgemeinert, daß an Stelle des Punktes das Linienelement als Raumelement eingeführt wurde. Die Methoden der Übertragungslehre wurden auch auf diese Linienelementmannigfaltigkeiten angewandt. Neben den euklidischzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten — denen sich die Finslerschen Räume unterordnen[4]) — wurden bald auch affin-[5]) und projektivzusammenhängende Räume[6]) von Linienelementen untersucht. In der vorliegenden Note möchte ich zeigen, daß sich E. CARTANS Verallgemeinerung des Erlanger Programms[7]) auch auf Mannigfaltigkeiten von Linienelementen ausdehnen läßt.

1. Kontinuierliche Transformationsgruppe und die Methode des beweglichen Bezugssystems.

Zu Grunde gelegt sei eine r-gliedrige Transformationsgruppe. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß es sich um eine analytische Transformationsgruppe handelt. In diesem Falle kann die Transforma-

---

[1]) F. KLEIN (1). S. Schriftenverzeichnis am Ende vorliegender Arbeit.

[2]) W. WIRTINGER (1), A. SCHOUTEN (1).

[3]) P. FINSLER (1).

[4]) E. CARTAN (3), S. 1—12.

[5]) O. VARGA (1).

[6]) Projektivzusammenhängende zweidimensionale Räume von Linienelementen bei E. CARTAN (2).

[7]) E. CARTAN (1).

tionsgruppe durch infinitesimale Transformationen erzeugt werden. Die infinitesimalen Transformationen mögen durch die r linear unabhängigen Lieschen Symbole

$$X_1(F),\ X_2(F), \ldots, X_r(F) \tag{1}$$

bestimmt sein. Der allgemeine Operator $X_\sigma(F)$ sei dabei durch

$$X_\sigma(F) = \xi^i_\sigma \frac{\partial F}{\partial x^i} \tag{2}$$

festgelegt. Eine bestimmte infinitesimale Transformation erhalten wir dann in

$$\delta x^i = \varepsilon_1 X_1(x^i) + \varepsilon_2 X_2(x^i) + \ldots + \varepsilon_r X_r(x^i). \tag{3}$$

In (3) sind die ε_i beliebig kleine konstante Größen. Damit die infinitesimalen Transformationen eine Gruppe erzeugen, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß ihre Lieschen Symbole den Lieschen Strukturgleichungen genügen. Dies ist genau der Inhalt der Umkehrung des zweiten Lieschen Fundamentalsatzes[8]). Zu den Strukturgleichungen gelangen wir folgendermaßen: bilden wir aus zwei beliebigen Symbolen $X_\varrho(F)$ und $X_\sigma(F)$ durch die Poissonsche Klammerbildung den neuen linearen Differentialoperator

$$(X_\varrho X_\sigma)\,F \equiv X_\varrho(X_\sigma(F)) - X_\sigma(X_\varrho(F)), \tag{4}$$

so muß sich derselbe linear aus den Lieschen Symbolen kombinieren lassen, mit Koeffizienten, die konstant sind. Es gilt also:

$$(X_\varrho X_\sigma)\,F = c_{\varrho\sigma\varkappa} X_\varkappa(F). \tag{5}$$

Die Größen $c_{\varrho\sigma\varkappa}$ werden als Strukturkonstanten der Gruppe bezeichnet. Durch (3) war eine bestimmte feste infinitesimale Transformation gegeben. Um die gesamte Transformationsschar zu erhalten, führen wir r Pfaffsche Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ der r Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ein. Sie sind dadurch bestimmt, daß ihre äußere Ableitung den Mauer—Cartanschen Strukturgleichungen

$$\omega'_\varkappa = -\frac{1}{2} c_{\varrho\sigma\varkappa} [\omega_\varrho \omega_\sigma] \tag{6}$$

genügen[9]). Auf der rechten Seite von (6) soll die eckige Klammer andeuten, daß es sich um das alternierende Produkt der ω_ϱ und ω_σ handelt[10]). Durch die Pfaffschen Gleichungen

$$\theta^i \equiv dx^i - \omega_\sigma(a, da)\, X_\sigma(x^i) = 0 \tag{7}$$

erhalten wir die gesamte infinitesimale Transformationsschar. Die durch

---

[8]) G. Kowalewski (1), insbes. S. 163—166.

[9]) G. Kowalewski (1), S. 135—137 und E. Cartan (4), S. 183—191.

[10]) Zu dem Kalkül der äußeren Differentialformen vgl. E. Cartan (5).

(7) bestimmten Pfaffschen Formen θ^i der $n+r$ Veränderlichen x^i und a_ϱ sind vollständig integrabel. Dies folgt daraus, daß die nach dem *Frobeniusschen Theorem* dazu notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen

$$\theta^{i\prime} = 0$$

auf Grund von

$$\theta^i = 0$$

wegen (5) und (6) erfüllt sind[11]). Die Integralmannigfaltigkeiten sind durch

$$x^{i\prime} = \Phi^i(x^1, \ldots, x^n, a_1, \ldots, a_r)$$

bestimmt. Die $x^{i\prime}$ spielen die Rolle von Integrationskonstanten und sind in der Umgebung eines festen $\overset{0}{x}{}^i$ Wertsystems beliebig wählbar. Löst man diese Gleichungen nach den x^i auf — was unter den getroffenen Voraussetzungen stets möglich ist — so erhält man in

$$x^i = f^i(x^{1\prime}, \ldots, x^{n\prime}, a_1, \ldots, a_r) \tag{8}$$

oder kürzer

$$x^i = S_a x^{i\prime} \tag{8'}$$

die Transformationsgruppe. Wegen dieses Tatbestandes wurde oben bemerkt, daß (5), (6) und (7) die gesamte infinitesimale Transformationsschar bestimmt.

Wir geben noch die geometrische Deutung der Gleichungen (7). Es handelt sich dabei um die von E. CARTAN herrührende Verallgemeinerung der *Darbouxschen Methode* des beweglichen Bezugssystems[12]). Bei einer Transformationsgruppe G läßt sich stets ein aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehendes Gebilde angeben, das nur bei der identischen Transformation invariant bleibt. Wir bezeichnen dieses Gebilde als Bezugssystem R_0. Unter Einwirkung der Transformationen S_a von G erhalten wir eine Schar R_a von Bezugssystemen. Wir bezeichnen R_a als das bewegliche Bezugssystem. Die Größen x^i bezeichnen wir als die auf R_0 bezogenen Koordinaten. In Bezug auf R_a definieren wir nun Relativkoordinaten ξ^i folgendermassen: Durch S_a^{-1} geht R_a in R_0 über, der Punkt mit den Koordinaten x^i geht dann in einen Punkt mit Koordinaten

$$\xi^i = S_a^{-1} x^i$$

über. Durch ξ^i definieren wir die Relativkoordinaten. Sind R_a und R_{a+da} zwei benachbarte Bezugssysteme, so wird die Transformation,

---

11) E. CARTAN (4), S. 193.

12) E. CARTAN (6).

die R_a nach R_{a+da} bringt, den Punkt x^i in $x^i + dx^i$ überführen, dx^i genügt dabei den Gleichungen (7). Die Relationen (7) besagen also, daß ein Punkt mit seinem Bezugssystem im Sinne der Gruppe G fest verbunden ist[13]).

2. Aufbau der Linienelementgeometrie.

Wir gehen von einem n-dimensionalen Punktraum aus, den wir auf Koordinaten $u^1, u^2, \ldots, u^n$ beziehen. Denselben erweitern wir dadurch zu einer Linienelementmannigfaltigkeit, daß wir zu jedem Punkt sämtliche hindurchgehende Linienelemente hinzunehmen. Die Richtung eines Linienelementes wird durch das Verhältnis der n nicht sämtlich verschwindenden Parameter $\dot{u}^1, \dot{u}^2, \ldots, \dot{u}^n$ angegeben. Ein Linienelement ist also durch $(u, \dot{u})$ bestimmt und die Mannigfaltigkeit ist $(2n-1)$-dimensional.

Einem beliebigen Linienelement $(\underset{0}{u}, \underset{0}{\dot{u}})$ ordnen wir einen Tangentialraum zu. Diese Zuordnung kann so getroffen werden, wie dies im Falle eines Punktraumes von H. WEYL durchgeführt wurde[14]). Demnach ist der zum Linienelement $(\underset{0}{u}, \underset{0}{\dot{u}})$ gehörige Vektorkörper ein n-dimensionaler, linearer, zentrierter Raum. Die unmittelbare „kegelförmige" Umgebung des Mittelpunktes wird mit der unmittelbaren „kegelförmigen" Umgebung von $(\underset{0}{u}, \underset{0}{\dot{u}})$ durch eine affin-lineare Beziehung zur Koinzidenz gebracht. Letzteres besagt genauer: Wir wählen n beliebige linear unabhängige Vektoren $\underset{(k)}{e^i}$ des Körpers, dieselben machen wir zu Achsen eines Koordinatensystems x^i. Der Richtung $\underset{0}{\dot{u}^i}$ entspreche

$$\underset{0}{\dot{x}^i} = \underset{(k)}{e^i}\, \underset{0}{\dot{u}^k}. \tag{9}$$

Dabei sei $\underset{0}{\dot{u}^i}$ so normiert, daß

$$\underset{0}{\dot{x}^i}\underset{0}{\dot{x}^i} = \varepsilon^2 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Die kegelförmige Umgebung, die zu der vom Ursprung der x^i ausgehenden Richtung $\underset{0}{\dot{x}^i}$ gehört, ist durch

$$\left\{\begin{aligned} & x^k \underset{0}{\dot{x}^k} < \varepsilon \\ & \frac{x^k \underset{0}{x^k}}{\sqrt{x^k x^k}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

festgelegt. Die affin-lineare Beziehung, die x^i und u^i zur Deckung

---

13) Vgl. zu diesen Paragraphen E. CARTAN (4) und G. KOWALEWSKI (1).

14) H. WEYL (1), S. 92—93.

bringt, ist durch

$$x^i = e^i_{(k)} u^k \tag{11}$$

bestimmt, wobei die x^i aus der Umgebung (10) zu nehmen sind.

In der Linienelementmannigfaltigkeit soll nun eine, durch die Transformationsgruppe G bestimmte Geometrie aufgebaut werden. Dies geschehe durch zwei Forderungen.

I. *In jedem, zu einem Linienelement gehörigen Tangentialraum soll die durch die Gruppe G bestimmte Kleinsche Geometrie gelten.*

Durch diese Forderung wird die zu einer kegelförmigen Umgebung von $(u, \dot{u})$ gehörige loka'e Geometrie festgelegt. Sie besteht bekanntlich in den Differentialinvarianten von (6) und (7).

Den Zusammenhang der Tangentialräume legt die folgende zweite Forderung fest:

II. *Tangentialräume, die zu benachbarten Linienelementen $(u, \dot{u})$ und $(u+du, \dot{u}+d\dot{u})$ gehören, hängen durch eine infinitesimale Transformation* (3) *zusammen.*

Die zweite Forderung bedeutet geometrisch folgendes: ist x^i ein Punkt im Tangentialraum von $(u, \dot{u})$, dann ordnen wir demselben im Tangentialraum von $(u+du, \dot{u}+d\dot{u})$ denjenigen Punkt x^i+dx^i zu, der die gleichen Relativkoordinaten besitzt. Dies besagt, daß zwei passende Bezugssysteme von $(u, \dot{u})$ bzw. $(u+du, \dot{u}+d\dot{u})$ so ineinander übergehen, als ob sie in ein und denselben Kleinschen Raum eingebettet wären.

Die Koeffizienten ε_i in (3) hängen in unserem Falle von der Wahl der u^i, $\dot{u}^i$, u^i+du^i, $\dot{u}^i+d\dot{u}^i$ ab, d. h. sie sind Funktionen dieser Größen. Da für

$$du^i = 0, \quad d\dot{u}^i = 0$$

die

$$\varepsilon_\varrho = 0$$

sind, und in infinitesimalen Transformationen Glieder von höherer als erster Ordnung in du^i und $d\dot{u}^i$ vernachlässigt werden, sind diese Funktionen Summen zweier Pfaffscher Formen in du^i und $d\dot{u}^i$:

$$\varepsilon_\varrho = -(\pi_\varrho(u, \dot{u}, d\dot{u}) + \omega_\varrho(u, \dot{u}, du)). \tag{12}$$

Man erhält also:

$$\tilde{\omega}^i \equiv dx^i + \pi_\varrho(u, \dot{u}, d\dot{u})\, X_\varrho(x^i) + \omega_\varrho(u, \dot{u}, du)\, X_\varrho(x^i) = 0. \tag{13}$$

Die Gleichungen (13) bestimmen den „Zusammenhang“ der zur Gruppe G gehörigen Linienelementmannigfaltigkeit.

3. Krümmungstheorie und Isomorphismus.

Die äußere Ableitung $\tilde{\omega}^{i\prime}$ der Formen (13) ist im allgemeinen von Null verschieden. Verschwindet dieselbe, so heißt dies, daß eine Linienelementmannigfaltigkeit einer Kleinschen Geometrie vorliegt. In der Tat, bei konstanten $\dot{u}^i$ ist das Gleichungssystem

$$dx^i + \omega_\varrho(u, \dot{u}, du)\, X_\varrho(x^i) = 0,$$

wegen den getroffenen Voraussetzungen vollständig integrabel.

Im allgemeinen Fall ist die äußere Ableitung $\tilde{\omega}^{i\prime}$ von $\tilde{\omega}^i$ nicht identisch Null, man erhält:

$$\tilde{\omega}^{i\prime} = X_\varkappa(x^i)\, \Omega_\varkappa, \tag{14'}$$

wobei

$$\Omega_\varkappa = \pi'_\varkappa + \omega'_\varkappa - \frac{1}{2} c_{\varrho\sigma\varkappa}[\pi_\varrho + \omega_\varrho,\ \pi_\sigma + \omega_\sigma]. \tag{14}$$

Wenn wir diese alternierende Form zweiten Grades weiter entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Omega_\varkappa = \sum_{(i,k)} A_{\varkappa ik}[d\dot{u}^i\, d\dot{u}^k] + B_{\varkappa ik}[du^i\, d\dot{u}^k] + \\ + \sum_{(i,k)} C_{\varkappa ik}[du^i\, du^k]. \end{aligned} \tag{15}$$

Auf der rechten Seite von (15) soll im ersten und dritten Posten über alle Kombinationen der Zeigerpaare i, k summiert werden. Setzen wir

$$\begin{aligned} \pi_\varrho &= p_{\varrho k}(u, \dot{u})\, d\dot{u}^k, \\ \omega_\varrho &= m_{\varrho k}(u, \dot{u})\, du^k, \end{aligned} \tag{16}$$

so erhält man

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\varkappa ik} &= \frac{\partial p_{\varkappa k}}{\partial \dot{u}^i} - \frac{\partial p_{\varkappa i}}{\partial \dot{u}^k} - \frac{1}{2} c_{\varrho\sigma\varkappa}(p_{\varrho i} p_{\sigma k} - p_{\varrho k} p_{\sigma i}), \\ B_{\varkappa ik} &= \frac{\partial p_{\varkappa k}}{\partial u^i} - \frac{\partial m_{\varkappa i}}{\partial \dot{u}^k} - c_{\varrho\sigma\varkappa} p_{\varrho k} m_{\sigma i}, \\ C_{\varkappa ik} &= \frac{\partial m_{\varkappa k}}{\partial u^i} - \frac{\partial m_{\varkappa i}}{\partial u^k} - \frac{1}{2} c_{\varrho\sigma k}(m_{\varrho i} m_{\sigma k} - m_{\varrho k} m_{\sigma i}). \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Wir geben die geometrische Deutung der Größen $\Omega_\varkappa$ an. Gegeben sei eine beliebige geschlossene und rektifizierbare Kurve K und längs derselben eine stetig differenzierbare Folge von Linienelementen durch

$$\left\{ \begin{aligned} u^i &= u^i(t), \\ \dot{u}^i &= \dot{u}^i(t). \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Im Falle eines Kleinschen Raumes kommen wir, wenn wir das bewegliche Bezugssystem mit den zu ihm relativ festen x^i um K — auf Grund von (13) — herumführen, zum selben Punkt x^i zurück, da ja jeder

Tangentialraum mit dem gegebenen Raum zusammenfällt, d. h. es ist

$$\int_K dx^i = 0, \tag{19}$$

zufolge (13). Im allgemeinen Falle fällt der Punkt x^i in Anfangs- und Endlage nicht zusammen, die Tangentialräume sind verschieden. Betrachten wir eine beliebige stetig differenzierbare Fläche F, die von K berandet ist, so gilt bekanntlich

$$\int_K \tilde{\omega}^i = \iint_p \tilde{\omega}^{i\prime}. \tag{20}$$

Hieraus kommt wegen (13) und (14′)

$$\int_K dx^i = -\iint_p \Omega_\varkappa X_\varkappa(x^i). \tag{21}$$

Die $\Omega_\varkappa$, oder aber die sie bestimmende Größen (17), geben die Abweichung vom Kleinschen Raum an und können als *Krümmungsgrößen* bezeichnet werden.

Die Krümmungsgrößen (17) sind nicht völlig unabhängig. Durch Bildung der äußeren Ableitung von (14) erhält man

$$\Omega'_\varkappa - c_{\varrho\sigma\varkappa}[\Omega_\varrho\,\omega_\sigma] = 0. \tag{22}$$

Entwickelt man diese äußere Form dritten Grades, so erhält man diejenigen Relationen zwischen den Krümmungsgrößen, die als Verallgemeinerungen der Bianchischen Identitäten anzusprechen sind.

Zwei zur selben Gruppe gehörigen Mannigfaltigkeiten $(u, \dot{u})$ und $(\bar{u}, \dot{\bar{u}})$ sind isomorph, wenn es eine erweiterte Punkttransformation

$$\begin{aligned} \bar{u}^i &= \bar{u}^i(u^1, \ldots, u^n) \\ \dot{\bar{u}}^i &= \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k}\,\dot{u}^k \end{aligned} \tag{23}$$

gibt, die die eine Mannigfaltigkeit in die andere überführt und dabei den Zusammenhang der Tangentialräume erhält. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die entsprechenden Pfaffschen Formen $\tilde{\omega}_\varrho$ und $\bar{\tilde{\omega}}_\varrho$ nach Ausführung der Substitution (23) der Identität

$$\tilde{\omega}_\sigma \equiv \bar{\tilde{\omega}}_\sigma \tag{24}$$

genügen. Aus (24) folgt durch äußere Ableitung

$$\tilde{\omega}'_\sigma \equiv \bar{\tilde{\omega}}'_\sigma. \tag{25}$$

Für beide Mannigfaltigkeiten müssen die Strukturkonstanten übereinstimmen, da es sich um dieselbe Gruppe handelt. Nach der Umkehrung des Lieschen dritten Fundamentalsatzes definieren ja die $c_{\varkappa\sigma\lambda}$ — die noch gewissen Relationen genügen müssen — in abstrakto eine Gruppe[15].

[15]) G. Kowalewski (1), S. 169—187.

Daraus folgt nun wegen der Definition (14) der Ω_σ, daß

$$\Omega_\sigma \equiv \bar{\Omega}_\sigma \tag{26}$$

sein muß. Damit ist gleichbedeutend, daß für beide Mannigfaltigkeiten die entsprechenden Krümmungsgrößen (17) identisch übereinstimmen. Hieraus folgt, daß auch sämtliche Ableitungen dieser Größen identisch gleich sind. Bestehen umgekehrt die Gleichungen (nicht Identitäten!) (24), (25), (26) und stimmen die Ableitungen entsprechender Krümmungsgrößen überein, so kann man Transformationen der Gestalt (23) finden, die diese identisch befriedigen. Die Mannigfaltigkeiten sind dann isomorph. Dazu ist nur zu bemerken, daß für die Differentialgleichungen (24) die übrigen Bedingungen (25), (26) u. s. f. genau mit ihren Integrabilitätsbedingungen übereinstimmen.

Schriftenverzeichnis.

E. Cartan, (1) Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, **40** (1923).
(2) Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, *Matematica*, **3**, **4** (1930).
(3) Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris, 1934).
(4) La théorie des groupes finis et continus et la géometrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, fasc. XVIII des *Cahiers scientifiques* (Paris, 1937).
(5) Leçons sur les invariants intégraux (Paris, 1922).
(6) La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, *Bull. Sc. Math. de France*, **34** (1910).

P. Finsler, (1) Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen (Dissertation Göttingen, 1918).

F. Klein, (1) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Math. Ann.*, **43** (1893) und Kleins *Ges. Abh.* (Berlin, 1921), Bd. **1**, S. 460.

G. Kowalewski, (1) Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen (Leipzig, 1931).

A. Schouten, (1) Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **50**.

O. Varga, (1) Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen, *Lotos*, **84** (Prag, 1936).

H. Weyl, (1) Raum — Zeit — Materie, 5. Aufl. (Berlin, 1923).

W. Wirtinger, (1) On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, *Trans. of the Cambridge Philosophical Society*, **22** (1921).

(Eingègangen am 15. Mai 1944.)

Zur Theorie der Gleichungen in endlichen Körpern.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

1. Wir legen einen beliebigen endlichen Körper k von q Elementen und der Karakteristik p zu Grunde, wobei dann q eine Potenz der Primzahl p ist, und untersuchen in ihm die Lösbarkeit einer Gleichung $F=0$, wobei

$$F=F(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

ein beliebiges nichtkonstantes Polynom g-ten Grades in den n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ ist. Da jedes Element von k der Gleichung $x^q-x=0$ genügt, verlieren wir nichts an Allgemeinheit, indem wir F reduziert d. h. in jedem x_i vom Grade $\leqq q-1$ annehmen. Obzwar sich unsere Betrachtungen auch auf die Gleichung $F=1$ mit homogenem F beziehen (man schreibe sie hierzu in der Form $F-1=0$), werden wir uns mit ihr am Ende der Arbeit besonders beschäftigen und für sie schärfere Resultate bekommen.

CHEVALLEY[1]) bewies eine Vermutung von ARTIN über die Anzahl der gemeinsamen Lösungen eines Systems von Gleichungen in k. Der Satz lautet insbesondere für unseren Fall so: Ist $g<n$ und die Gleichung $F=0$ lösbar, so hat sie mindestens zwei Lösungen[2]). WARNING[3]) hat dann den Satz durch genauere Aussagen über die Anzahl der Lösungen verschärft. Seine Hauptresultate sind (wieder für den Fall einer Gleichung) im folgenden Satz enthalten: Ist $g<n$ und die Gleichung $F=0$ lösbar, so ist die Anzahl der Lösungen $\equiv 0 \pmod{p}$[2]) und $\geqq q^{n-g}$. Selbst die Frage der Lösbarkeit lassen beide Arbeiten unberührt, abgesehen von einigen ganz einfachen Beispielen von WARNING für unlösbare Gleichungen.

---

[1]) C. CHEVALLEY, Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, *Abh. math. Sem. d. Hansischen Univ.*, **11** (1936), S. 73–75.

[2]) Für Gleichungssysteme ebenso, wobei dann g die Summe der Grade der einzelnen Gleichungen ist.

[3]) E. WARNING, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley, *Abh. math. Sem. d. Hansischen Univ.*, **11** (1936), S. 76–83.

2. Wir nennen den Rang r von F die kleinste natürliche Zahl, für die es eine nichtsinguläre homogene lineare Substitution der $x_1, \ldots, x_n$ gibt, durch die F in ein Polynom von r Unbestimmten übergeführt wird. Immer ist $r \leqq n$.

Vermutung. *Ist k ein Primkörper und $g \leqq r$, so ist $F = 0$ lösbar.*

Für ein beliebiges k wäre dies falsch nach dem Beispiel 2 von Warning (s. [3]) S. 83), das etwas verallgemeinert so lautet: Ist k kein Primkörper, so ist die Gleichung

$$a_1 x_1^{q-1} + \ldots + a_n x_n^{q-1} + c = 0 \qquad (n \text{ beliebig})$$

unlösbar, wenn die Koeffizienten außer c dem in k enthaltenen Primkörper angehören. Das kommt nämlich einfach davon, daß x^{q-1} nur die Werte 0, 1 annimmt, die im Primkörper von k sind. Auch sieht man leicht, daß in diesem Beispiel $r = n$ ist (also r beliebig groß sein kann), wenn man nur $a_1, \ldots, a_n \neq 0$ wählt. Sonst könnte man nämlich für die x_i homogene lineare Ausdrücke $x_i = l_i(y_1, \ldots, y_n)$ mit nichtverschwindender Determinante D einsetzen, so daß

$$a_1 l_1^{q-1} + \ldots + a_n l_n^{q-1}$$

ein Polynom in $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ist. Dann verschwindet die nach y_n genommene Derivierte:

$$-a_1 \alpha_1 l_1^{q-2} - \ldots - a_n \alpha_n l_n^{q-2} = 0,$$

wobei α_i der Koeffizient von y_n in l_i ist. Wegen $D \neq 0$ lassen sich aber die $y_1, \ldots, y_n$ so wählen, daß alle $l_1, \ldots, l_n$ verschwinden bis auf ein beliebiges l_j. Das ergibt $\alpha_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, was doch wegen $D \neq 0$ ein Widerspruch ist.

Auch läßt sich r in der Vermutung nicht durch ein kleineres ersetzen. Hierfür führen wir gleich zwei Beispiele an. Wir betrachten im Primkörper k mit $p \geqq 3$ die Gleichungen

$$x_1^{p-1} + \ldots + x_n^{p-1} + c = 0,$$

$$x_1^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + x_n^{\frac{p-1}{2}} + c = 0.$$

In ihnen ist $r = n$, denn obiger Beweis gilt auch jetzt. Sie sind für $n < p-1$, $c = 1$ bzw. $n < \frac{p-1}{2}$, $c = \frac{p-1}{2}$ unlösbar, da $x^{\frac{p-1}{2}}$ nur die Werte 0, ± 1 annimmt. (Dagegen sind sie, wie leicht zu sehen, für $n \geqq p-1$ bzw. $n \geqq \frac{p-1}{2}$ und beliebiges c lösbar, entsprechend der Vermutung).

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß die Vermutung (in zwei Richtungen) scharf ist, werden wir im Laufe unserer Betrachtungen

— die übrigens fast ausschließlich einen beliebigen k betreffen — sehen, daß die Vermutung berechtigt zu sein scheint.

3. Wir führen das Ideal

$$\mathfrak{J}=(x_1^q-x_1,\ldots,x_n^q-x_n) \tag{2}$$

ein und beweisen folgendes:

Kriterium 1. *$F=0$ ist dann und nur dann nicht lösbar, wenn*

$$F^{q-1}-1\equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}} \tag{3}$$

d. h. mit irgendwelchen Polynomen $H_1,\ldots,H_n$ in $x_1,\ldots,x_n$

$$F^{q-1}-1=H_1(x_1^q-x_1)+\ldots+H_n(x_n^q-x_n) \tag{4}$$

ist. Man darf annehmen, daß H_i $(i=1,\ldots,n-1)$ in jedem $x_{i+1},\ldots,x_n$ vom Grade $\leqq q-1$ ist. Zugleich ist dann das Maximum der Grade von $H_1,\ldots,H_n$ gleich $gq-g-q$.

Man kann nämlich in

$$F^{q-1}-1\equiv R \pmod{\mathfrak{J}} \tag{5}$$

das Polynom R reduziert annehmen. Bekanntlich verschwindet R für alle $x_1,\ldots,x_n$ dann und nur dann, wenn $R=0$ ist[4]). Weiter sind die zwei Seiten von (5) als Funktionen in k offenbar gleich. Die linke Seite verschwindet für alle $x_1,\ldots,x_n$ dann und nur dann, wenn $F=0$ keine Lösung hat, womit die erste Behauptung des Kriteriums bewiesen ist.

Die zweite Behauptung beweisen wir in $n-1$ Schritten. Als erster Schritt reduzieren wir H_1 nach $x_2,\ldots,x_n$, d. h. bestimmen in

$$H_1=h_2(x_2^q-x_2)+\ldots+h_n(x_n^q-x_n)+H_1'$$

die Polynome $h_2,\ldots,h_n,H_1'$ so, daß letzteres in jedem der $x_2,\ldots,x_n$ vom Grade $\leqq q-1$ ist. Die rechte Seite von (4) geht dann in

$$H_1'(x_1^q-x_1)+[H_2+h_2(x_1^q-x_1)](x_2^q-x_2)+\ldots+[H_n+h_n(x_1^q-x_1)](x_n^q-x_n)$$

über. Die neu aufgetretenen Faktoren bezeichnen wir wieder mit $H_1,\ldots,H_n$ und sehen, daß der auf H_1 bezügliche Teil der Behauptung schon bewiesen ist. Nach diesem beendeten ersten Schritt verfahren wir im zweiten Schritt ähnlich, aber so, daß wir am ersten Produkt auf der rechten Seite von (4) nichts mehr ändern und H_2 nur noch nach $x_3,\ldots,x_n$ reduzieren. Auf diesem Weg sieht man die Behauptung leicht ein.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, bezeichnen wir mit m das Maximum der Grade aller H_i. Da die linke Seite von (4) vom Grad $gq-g$ ist, muß $gq-g\leqq m+q$ sein. Wäre die Behauptung falsch,

[4]) S. in [1]) S. 74.

d. h. es gelte hier das Zeichen $<$, so bedeutet das, daß die Summe S der Glieder $m+q$-ten Grades auf der rechten Seite von (4) verschwindet. Es ist

$$S = H_1^* x_1^q + \ldots + H_n^* x_n^q,$$

wobei H_i^* die Summe der Glieder m-ten Grades von H_i bedeutet. Wir nehmen an, daß rechts das i-te Produkt das letzte nichtverschwindende ist. In x_i ist dieses Produkt von einem Grade $\geqq q$, die voranstehenden aber vom Grade $\leqq q-1$, woraus $S \neq 0$ folgt. Dieser Widerspruch beweist das Kriterium 1.

4. Nennen wir die Summe der Glieder höchsten Grades eines Polynoms seinen Hauptteil, der also immer ein homogenes Polynom ist, und bezeichnen ihn für F mit $\bar{F}$. Ähnlich (aber selbstverständlich ohne einen inneren Zusammenhang in den Bezeichnungen) führen wir das Ideal [vgl. (2)]

$$\bar{\mathfrak{J}} = (x_1^q, \ldots, x_n^q) \tag{6}$$

ein. Offenbar gehören zu $\bar{\mathfrak{J}}$ außer 0 die und nur die Polynome, deren jedes Glied mindestens ein x_i mit einem Exponenten $\geqq q$ enthält.

Satz 1. *$F=0$ ist lösbar, wenn*[5]) $g \leqq n$ *und*

$$\bar{F}^{q-1} \not\equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{J}}} \tag{7}$$

ist. Schreibt man die linke Seite ausmultipliziert in der Form

$$\bar{F}^{q-1} = \sum_{i_1+\ldots+i_n = g(q-1)} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}, \tag{8}$$

so bedeutet (7) nichts anderes, als daß nicht alle Koeffizienten $a_{i_1 \ldots i_n}$ $(i_1 \leqq q-1, \ldots, i_n \leqq q-1)$ verschwinden.

Zum Beweis nehmen wir an, daß $F=0$ nicht lösbar ist. Nach Kriterium 1 gilt dann (4) mit Polynomen H_i vom Grade $\leqq gq-g-q$. Der Vergleich der Glieder höchsten Grades ergibt:

$$\bar{F}^{q-1} = H_1^* x_1^q + \ldots + H_n^* x_n^q, \tag{9}$$

wobei nämlich H_i^* die Summe der Glieder $gq-g-q$-ten Grades von H_i ist. Aus (9) folgt $\bar{F}^{q-1} \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{J}}}$. Wenn also umgekehrt (7) gilt, so ist $F=0$ lösbar, womit Satz 1 bewiesen ist. [Nach [5]) haben wir nur scheinbar mehr als den Satz bewiesen.]

5. Wie wir gesehen haben, umfaßt Satz 1 nur einen kleinen Teil vom Kriterium 1, der nämlich so entstanden ist, daß wir in (3) nur die Glieder höchsten Grades miteinander verglichen haben. Leicht kann

---

[5]) Diese Bedingung $g \leqq n$ ist in der nachfolgenden (7) enthalten, wie man das aus (8) gleich entnimmt, und wäre deshalb ohne weiteres fortzulassen. Wir wollten aber diese „conditio sine qua non" von (7) voranschicken, um den Anschein zu vermeiden, daß der Satz auch für $g > n$ brauchbar wäre. (Vgl. [7]).)

man aus Kriterium 1 weitere Lösbarkeitsbedingungen von weniger Eleganz gewinnen, indem man auch andere Glieder in (4) beachtet. Ein anderes Verfahren wäre, daß man (3) in der äquivalenten Form

$$(10) \qquad F^q - F \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ F\mathfrak{J})$$

schreibt, wobei man die linke Seite leicht berechnet. Wenn man nämlich $F = \Sigma aX$ setzt, wobei die a Elemente von k und die X Potenzprodukte der $x_1, \ldots, x_n$ sind, so ist die linke Seite von (10) auf Grund der Regeln $(u+v+\ldots)^p = u^p + v^p + \ldots$, $a^p = a$ einfach $\Sigma a(X^q - X)$. Uns ist es aber nicht gelungen diesen Weg weiter zu verfolgen.

6. Satz 1 macht sehr wahrscheinlich, daß bei festem k, g, n mit $g \leqq n$ die Mehrzahl aller $F=0$ lösbar ist, und zwar bei wachsendem n in steigerndem Maße. Nämlich lautet (7) im „ungünstigsten" Falle $g=n$ so, daß der Koeffizient $a_{q-1,\ldots,q-1}$ in (8) nicht verschwindet. Da aber das Verschwinden eines bestimmten Koeffizienten in (8) mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{q}$ zu erwarten ist, scheint $F=0$ für $g=n$ höchstens[6]) nur im $\frac{1}{q}$-ten Teil aller Fälle unlösbar zu sein. Für $n = g+1, g+2, \ldots$ ist die Lage offenbar noch viel günstiger, da durch (7) immer mehr Koeffizienten betroffen werden [schon für $n = g+1$ kommen $\binom{g+q-1}{g}$ Koeffizienten in Betracht].

7. Bezeichnet $\bar{r}$ den Rang von $\bar{F}$ (es ist dann $\bar{r} \leqq r \leqq n$), so zeigen wir, daß Satz 1 im Fall $g > \bar{r}$ über die Lösbarkeit von $F=0$ nicht entscheidet.[7])

Es gibt nämlich eine nichtsinguläre homogene lineare Substitution σ, die die neuen Unbestimmten $y_1, \ldots, y_n$ einführt und $\bar{F}$ in $\bar{F}' = \bar{F}'(y_1, \ldots, y_{\bar{r}})$ überführt. Aus $g > \bar{r}$ folgt

$$\bar{F}'^{\,q-1} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ y_1^q, \ldots, y_{\bar{r}}^q).$$

Die inverse Substitution σ^{-1} führt $\bar{F}'$ zurück in $\bar{F}$ und jedes y_i^q in ein Polynom des Moduls $(x_1^q, \ldots, x_n^q)$ über. So entsteht

$$\bar{F}^{q-1} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \bar{\mathfrak{J}}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

8. Wir zeigen folgendes: Ist k kein Primkörper und enthält jedes Glied von $\bar{F}$ mindestens ein x_i zu einem Exponenten $\geqq p$, so ist die

[6]) Man nehme Rücksicht darauf, daß (7) hinreichend, aber nicht notwendig zur Lösbarkeit von $F=0$ ist.

[7]) Demgemäß hätten wir in Satz 1 die Ungleichung $g \leqq n$ ohne jeden Verlust durch $g \leqq \bar{r}$ ersetzen können. Trotzdem wollten wir das nicht tun, da man doch bei Anwendung des Satzes den Rang von $\bar{F}$ nicht zu berechnen braucht.

Frage der Lösbarkeit von $F=0$ auf Grund von Satz 1 nicht zu entscheiden.

Nämlich ist jetzt offenbar

$$\bar{F}^{\frac{q}{p}} \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{J}}}.$$

Also ist (7) wegen $q-1 > \frac{q}{p}$ unmöglich, und das beweist die Behauptung.

9. Wir führen hier für Satz 1 zwei einfache Beispiele an, deren Zahl man leicht vermehren könnte.

Beispiel 1. *Besteht $\bar{F}$ aus dem einzigen Glied $ax_1 \ldots x_g$ $(a \neq 0)$, so ist $F=0$ lösbar.*

Beispiel 2. *Ist k ein Primkörper, e die größte ganze Zahl $\leqq \frac{p-1}{g}$,*

$$\bar{F} = a_1 x_1^g + \ldots + a_n x_n^g \qquad \left(a_1 \ldots a_n \neq 0,\ n \geqq \frac{p-1}{e}\right),$$

so ist $F=0$ lösbar.

Im Beispiel 1 ist nämlich (7) offenbar erfüllt. Für Beispiel 2 ist

$$\bar{F}^{ne} \not\equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{J}}}, \tag{11}$$

da die linke Seite nach der Polynomialentwicklung das mit keinem anderen aufgehende nichtverschwindende Glied

$$\frac{(p-1)!}{(e!)^n} (a_1 \ldots a_n)^e (x_1 \ldots x_n)^{ge}$$

enthält, wobei $ge \leqq p-1$ ist. Wegen $ne \geqq p-1$ folgt aus (11) das Bestehen von (7) für diesen Fall, zugleich also die Richtigkeit von Beispiel 2.

10. Aus Beispiel 2 heben wir folgenden Spezialfall hervor:

Ist k ein Primkörper und $g \mid p-1$, so ist die Gleichung

$$a_1 x_1^g + \ldots + a_g x_g^g = c \qquad (a_1 \ldots a_g \neq 0)$$

lösbar. (Hiervon haben wir die trivialen Fälle $a_1 = \ldots = a_g = 1$, $p \geqq 3$, $g = p-1$ oder $\frac{p-1}{2}$ schon in 2. erwähnt.) In der Kongruenzsprache:

Ist $g \mid p-1$ und sind $a_1, \ldots, a_g$, c ganze rationale Zahlen, so ist

$$a_1 x_1^g + \ldots + a_g x^g \equiv c \pmod{p} \qquad (p \nmid a_1 \ldots a_g)$$

lösbar.

Mir war dieser Satz nicht einmal für den Fall $a_1 = \ldots = a_g = 1$ bekannt. Auch scheint er nicht mit einfacheren Mitteln beweisbar zu sein.

11. Im folgenden beschäftigen wir uns nur noch mit dem anfangs erwähnten Sonderfall $F=1$ mit homogenem F. (Auch 10. gehörte schon hierher.) Wir bemerken im voraus, daß im Fall $q-1 \mid g$ den bisherigen gegenüber nichts neues gewonnen wird.

Kriterium 2. *$F=1$ mit homogenem F ist dann und nur dann nicht lösbar, wenn*

$$(12) \qquad \frac{F^q-F}{F^{\frac{q-1}{\gamma}}-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}} \qquad [\gamma=(g, q-1)]$$

d. h. mit irgendwelchen Polynomen $H_1, \ldots, H_n$ in $x_1, \ldots, x_n$

$$(13) \qquad \frac{F^q-F}{F^{\frac{q-1}{\gamma}}-1} = H_1(x_1^q-x_1)+\ldots+H_n(x_n^q-x_n)$$

ist. Insbesondere ist also für $\gamma=1$ immer Lösbarkeit vorhanden[8]*). Für $\gamma>1$ darf angenommen werden, daß H_i $(i=1, \ldots, n-1)$ in jedem $x_{i+1}, \ldots, x_n$ vom Grade $\leqq q-1$ ist. Zugleich ist dann das Maximum der Grade von $H_1, \ldots, H_n$ gleich $(g-1)q-\frac{g}{\gamma}(q-1)$.*

Man wende nämlich Kriterium 1 auf unsere Gleichung $F-1=0$ an. Hierfür geht (3) [dessen linke Seite man zuerst in der Form $\frac{F^q-F}{F}$ schreibt] offenbar in

$$(14) \qquad \frac{F^q-F}{F-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}}$$

über. Dies gilt also dann und nur dann, wenn $F=1$ nicht lösbar ist. Da aber F homogen vom g-ten Grade ist, sind alle Gleichungen $c^{-g}F=1$ (c konstant, $\neq 0$) gleichzeitig lösbar. Also darf man F in (14) ohne weiteres durch $c^{-g}F$ ersetzen, wodurch man

$$(15) \qquad \frac{F^q-F}{F-c^g} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}}$$

bekommt. Somit wird die erste Behauptung von Kriterium 2 bewiesen, wenn wir zeigen, daß der größte gemeinschaftliche Teiler der linken Seiten aller (15) eben die linke Seite von (12) ist. Dies ist wirklich der Fall, da die c^γ offenbar alle verschiedenen c^g sind und das Produkt der entsprechenden (verschiedenen) Nenner $F-c^\gamma$ eben der Nenner in (12) ist. Die übrigen Behauptungen folgen ebenso wie im Beweis von Kriterium 1.

---

8) Das sieht man auch unmittelbar leicht ein.

12. Wie wir aus Kriterium 1 Satz 1 gewonnen haben, ebenso entsteht jetzt nach Kriterium 2 folgender:

Satz 2. *$F=1$ mit homogenem F ist im Fall $\gamma=(g, q-1)>1$*[9]) *lösbar, wenn*[10]) $g\left(1+\frac{1}{q-1}-\frac{1}{\gamma}\right) \leqq n$ *und*

$$F^{q-\frac{q-1}{\gamma}} \not\equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{J}}} \tag{16}$$

ist[11]).

(Eingegangen am 17. Mai 1944.)

---

[9]) Für $\gamma=1$ ist die Lösbarkeitsfrage nach Kriterium 2 in bejahendem Sinne schon erledigt.

[10]) Auch hierüber gilt ähnliche Bemerkung wie in [5]).

[11]) Man beachte, daß jetzt F sein eigener Hauptteil ist, weshalb die Bezeichnung $\overline{F}$ überflüssig ist.

Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen.

Von BÉLA V. SZ. NAGY (Szeged).

Einleitung.

Eine nach 2π periodische stetige Funktion $f(x)$ mit der Fourierschen Reihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

kann bekanntlich beliebig genau durch die Fejérschen Mittel

$$\sigma_{1n}(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ihrer Fourierschen Reihe approximiert werden.

Hat $f(x)$ sogar eine beschränkte Derivierte[1]), so ist nach einem Satze von S. BERNSTEIN[2]) diese Approximation mindestens von der Ordnung $\frac{\log n}{n}$; genauer gesagt, es gilt

$$|f(x)-\sigma_{1n}(f;x)|\leqq \max|f'|\,.\left(\frac{\log 2n}{n}+\frac{1}{\pi n}\right).$$

Die Konstante rechts kann noch verkleinert werden. Für die kleinstmögliche Konstante $\varrho_{1n}^{(1)}$ hat kürzlich S. M. NIKOLSKY die folgende asympto-

---

[1]) Wenn wir im folgenden über die Beschränktheit der Derivierten r-ter Ordnung einer Funktion $f(x)$ sprechen, nehmen wir immer an, daß $f^{(r)}(x)$ fast überall existiert und beschränkt ist, ferner, daß $f(x)$ die r-fach iterierte Integralfunktion von $f^{(r)}(x)$ ist (also, daß $f(x), f'(x), \dots, f^{(r-1)}(x)$ absolut stetig sind).

[2]) S. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mém. Acad. Belg.*, (2) 4 (1912), S. 1—104, insbesondere S. 88—89.

tische Formel gefunden[3]):

$$\varrho_{1n}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wir werden für jedes n den genauen Wert von $\varrho_{1n}^{(1)}$, und die Funktionen, für welche diese maximale Abweichung statthat, bestimmen. Dabei dürfen wir uns offenbar auf den Fall $|f'| \leqq 1$ beschränken.

Satz I. *Unter allen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit $|f'(x)| \leqq 1$, werden diejenigen durch die Fejérschen Mittel $\sigma_{1n}(f;x)$ (für jedes feste n) am ungenauesten approximiert, für welche $f'(x)$ auf Halbperioden abwechselnd gleich $+1$ und -1 ist. Die auftretende größte Abweichung ist*

$$\varrho_{1n}^{(1)} = \frac{1}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{2\nu+1} + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} \qquad \left(N = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

also

$$\varrho_{1n}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{R_n}{n}$$

mit

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{n}{n+2} < R_n < \frac{6}{\pi}.$$

Für dieselben Funktionen wird die Approximation am ungünstigsten auch dann, wenn man statt der Fejérschen Mittel mit den Cesàroschen Mitteln $\sigma_{\delta n}(f;x)$ höherer ganzer Ordnung δ approximiert. Bezeichnet $\varrho_{\delta n}^{(1)}$ die maximale Abweichung, so hat man

$$\varrho_{1n}^{(1)} < \varrho_{2n}^{(1)} < \varrho_{3n}^{(1)} < \dots \text{ und } \varrho_{\delta+1,n}^{(1)} - \varrho_{\delta n}^{(1)} < \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+\delta+1} + \frac{4}{\pi(n+\delta+1)};$$

für die betrachtete Funktionenmenge ist also die Approximation durch Cesàrosche Mittel höherer Ordnung im allgemeinen ungünstiger.

Es sei daran erinnert, daß die Cesàroschen Mittel $\sigma_{\delta n}(f;x)$ von der ganzen Ordnung δ folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+2}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n+\delta}\right)(a_k\cos kx + b_k \sin kx).$$

Für Funktionen mit einer beschränkten Derivierten höherer Ordnung erhält man eine Approximation mindestens von der Ordnung $\frac{1}{n}$. Wir beweisen den folgenden

[3]) S. M. Nikolsky, Sur l'allure asymptotique du reste dans l'approximation au moyen des sommes de Fejér des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, *Bull. Acad. Sci. URSS*, **4** (1940), S. 501—508 (russisch, mit französischem Auszug).

Satz II. *Unter allen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit $|f^{(r)}(x)| \leqq 1$ (r ist eine feste ganze Zahl größer als 1), werden diejenigen durch die Mittel $\sigma_{\delta n}(f; x)$ (für jedes feste ganze δ und n) am ungenauesten approximiert, für welche $f^{(r)}(x)$ auf Halbperioden abwechselnd $+1$ und -1 ist. Bezeichnet $\varrho_{\delta n}^{(r)}$ die größte Abweichung, so gilt*

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} + \frac{R_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}}, \quad \textit{bzw.} \quad \varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} - \frac{S_n^{(r)}}{(n+1)^r},$$

je nachdem r gerade bzw. ungerade ist; hier ist

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^r} \;{}^{4)},$$

$$|R_n^{(r)}| < \frac{4}{\pi} \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}, \quad 0 < S_n^{(r)} < \frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Weiter hat man

$$\varrho_{1n}^{(r)} < \varrho_{2n}^{(r)} < \varrho_{3n}^{(r)} < \ldots; \quad \varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Es sei bemerkt, daß die weniger scharfe asymptotische Abschätzung

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} + O\left(\frac{\log n}{n^r}\right)$$

kürzlich durch S. M. Nikolsky gefunden wurde[5]; er hat aber weder die exakten Werte, noch die extremalen Funktionen bestimmt.

G. Alexits hat sich kürzlich die Frage gestellt, wie kann eine Funktion $f(x)$ durch die Mittel $\sigma_{\delta n}(f; x)$ approximiert werden, wenn die *konjugierte* Fouriersche Reihe von $f(x)$, d. h. die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx),$$

eine Funktion $\bar{f}(x)$ mit beschränkter Derivierten darstellt[6]? Bezeichnet $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$ die größte Abweichung von $f(x)$ und $\sigma_{\delta n}(f; x)$, wenn $\bar{f}(x)$ die durch

4) Man sieht leicht, daß $K^{(2)} < K^{(4)} < K^{(6)} < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < K^{(7)} < K^{(5)} < K^{(3)}$ und $\lim\limits_{r \to \infty} K^{(r)} = \frac{4}{\pi}$.

5) S. M. Nikolsky, Estimations of the remainder of Fejér's sum for periodical functions possessing a bounded derivative, *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS*, **31** (1941), S. 210–214.

6) Bekanntlich hängt $\bar{f}(x)$ folgendermaßen mit $f(x)$ zusammen:

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, dt.$$

die Bedingung $|\bar{f}'(x)| \leqq 1$ bestimmte Funktionenmenge durchläuft, so gilt nach ALEXITS[7]): $\bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, insbesondere $\bar{\varrho}^{(1)}_{1n} < \frac{4}{n}$. Wir beweisen den folgenden

Satz III. *Bezeichnet* $\bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n}$ *die größte Abweichung von* $f(x)$ *und* $\sigma_{\delta n}(f; x)$, *wenn* $f(x)$ *die Menge der nach* 2π *periodischen stetigen Funktionen mit* $|\bar{f}'(x)| \leqq 1$ *durchläuft, so gilt*

$$\frac{1}{n+1} < \bar{\varrho}^{(1)}_{1n} < \frac{3}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} < \bar{\varrho}^{(1)}_{2n} < \frac{4}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} < \bar{\varrho}^{(1)}_{3n} < \frac{3}{n+1},$$

$$\bar{\varrho}^{(1)}_{3n} < \bar{\varrho}^{(1)}_{4n} < \bar{\varrho}^{(1)}_{5n} < \ldots \text{ und } \bar{\varrho}^{(1)}_{\delta+1, n} - \bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n} < \frac{1}{n+\delta+1} \quad (\text{für } \delta = 3, 4, \ldots).$$

In den Fällen $\delta = 3, 4, \ldots$ *(und dann für jedes* n*) wird die maximale Abweichung für diejenigen Funktionen* $f(x)$ *erreicht, für welche* $\bar{f}'(x)$ *auf Halbperioden abwechselnd gleich* $+1$ *und* -1 *ist.*

In den Fällen $\delta = 1, 2$ sind diese Funktionen keine Extremalen mehr, es gibt dann vermutlich überhaupt keine von n unabhängige Extremale.

Ebenso, wie das Bernsteinsche, kann auch dieses Problem auf den Fall höherer Derivierten übertragen werden. Unser Ergebnis ist der

Satz IV. *Unter allen nach* 2π *periodischen stetigen Funktionen* $f(x)$ *mit* $|\bar{f}^{(r)}(x)| \leqq 1$ *(r ist eine feste ganze Zahl größer als* 1*), werden diejenigen durch die Mittel* $\sigma_{\delta n}(f; x)$ *(für alle festen ganzen* δ *und* n*) am ungenauesten approximiert, für welche* $\bar{f}^{(r)}(x)$ *auf Halbperioden abwechselnd gleich* $+1$ *und* -1 *ist. Bezeichnet* $\bar{\varrho}^{(r)}_{\delta n}$ *die größte Abweichung, so gilt*

$$\bar{\varrho}^{(r)}_{1n} = \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+1} + \frac{\bar{R}^{(r)}_n}{(n+1)^{r+1}}, \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varrho}^{(r)}_{1n} = \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+1} - \frac{\bar{S}^{(r)}_n}{(n+1)^r},$$

je nachdem r gerade, bzw. ungerade ist; hier ist

$$\bar{K}^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^r}, \text{[8]})$$

[7]) G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de FOURIER, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), S. 410—433 (ungarisch mit französischem Auszug).

[8]) Man sieht leicht, daß $\bar{K}^{(2)} > \bar{K}^{(4)} > \bar{K}^{(6)} > \ldots > \frac{4}{\pi} > \ldots > \bar{K}^{(7)} > \bar{K}^{(5)} > \bar{K}^{(3)}$ und $\lim_{r \to \infty} \bar{K}^{(r)} = \frac{4}{\pi}$. Diese Größen hängen mit den in der Differenzenrechnung gebrauchten (Eulerschen) Zahlen E_r, bzw. C_r zusammen; $\bar{K}^{(2)} = \frac{\pi}{2}$, $\bar{K}^{(3)} = \frac{\pi^2}{8}$, $\bar{K}^{(4)} = \frac{\pi^3}{24}$, usw.

$$|\overline{R}_n^{(r)}| < \frac{4}{\pi} \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}, \quad 0 < \overline{S}_n^{(r)} < \frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Man hat wieder

$$\bar{\varrho}_{1n}^{(r)} < \bar{\varrho}_{2n}^{(r)} < \bar{\varrho}_{3n}^{(r)} < \ldots \text{ und } \bar{\varrho}_{\delta+1,n}^{(r)} - \bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)} < \frac{\overline{K}^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Alle diese Sätze ließen sich auch auf die Hölderschen Mittel übertragen[9]).

§ 1.

Es sei

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^r} \text{ und } \psi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r} \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Ist $r > 1$, so konvergieren diese Reihen gleichmäßig, folglich sind dann $\varphi_r(x)$ und $\psi_r(x)$ überall stetig; $\psi_r(0) = \psi_r(\pi) = 0$. Im Falle $r = 1$ gibt es gleichmäßige Konvergenz nur im Inneren von $(0, 2\pi)$ und es ist dort $\varphi_1(x) = -\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$ und $\psi_1(x) = \frac{\pi - x}{2}$. Die Reihen sind die Fourierschen Reihen ihrer Summen (auch im Falle $r = 1$).

Nach einer Bemerkung von FEJÉR ist $\psi_1(x) - \sigma_{1n}(\psi_1; x)$ auf $(0, \pi)$ positiv und auf $(\pi, 2\pi)$ negativ. Diese Funktion verschwindet ja in $x = \pi$ und ihre Derivierte ist auf $(0, 2\pi)$ gleich

$$-\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx = -\frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right)^2 < 0.$$

Da die Cesàroschen Mittel höherer Ordnung sich als arithmetische Mittel mit positiven Gewichten aus den Mitteln erster Ordnung ableiten lassen, stimmt das Vorzeichen von $\psi_1(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_1; x)$ für beliebige positive ganze δ und n mit demjenigen von $\sin x$ überein.

Allgemeiner: für jedes ungerade r stimmt das Vorzeichen von $\psi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_r; x)$ mit demjenigen von $\sin x$ überein. Dies sieht man durch Schluß von r auf $r+2$ folgendermaßen: Die Funktion $\psi_{r+2}(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_{r+2}; x)$ ist auf $(0, \pi)$ nach oben, auf $(\pi, 2\pi)$ nach unten konvex, da ihre zweite Derivierte gleich $-(\psi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_r; x))$ ist. Da sie an den Stellen $0, \pi$ und 2π verschwindet, muß sie auf $(0, \pi)$ positiv und auf $(\pi, 2\pi)$ negativ sein.

Für ungerades r ist die Funktion $\varphi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\varphi_r; x)$ auf $(0, \pi)$ monoton fallend, da ihre Derivierte gleich $-(\psi_{r-1}(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_{r-1}; x))$,

---

[9]) Die Ergebnisse dieser Arbeit (mit der Ausnahme des Hilfssatzes in § 4 und der daraus folgenden Verschärfung des Satzes III) wurden schon in ungarischer Sprache mitgeteilt in *Matematikai és Fizikai Lapok*, 49 (1942), S. 123–138.

also negativ ist. Wenn $\alpha_{r\delta n}$ den Wert der Funktion in $\pi/2$ bedeutet, dann ist also $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\, x)-\alpha_{r\delta n}$ auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ positiv und auf $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ negativ. Da diese Funktion außerdem gerade und nach 2π periodisch ist, stimmt ihr Vorzeichen überall mit demjenigen von $\cos x$ überein.

Die Funktion $\psi_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ ist auf $(0, \pi)$ positiv und nach oben konvex. Die Konvexität folgt daraus, daß $\psi_2''(x)=\varphi_1'(x)= \left(-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right)'=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}<0$; die Positivität folgt aus der Konvexität und daraus, daß die Funktion in 0 und π verschwindet. Nach einem Satze von FEJÉR[10]) bleiben die Cesàroschen Mittel der Sinusreihe einer auf $(0, \pi)$ positiven und nach oben konvexen Funktion unterhalb dieser Funktion. Demnach stimmt das Vorzeichen von $\psi_2(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_2;\, x)$ überall mit demjenigen von $\sin x$ überein.

Ähnliches gilt auch für die übrigen $\psi_r(x)$ mit geradem r, was man wieder durch Schluß von r auf $r+2$ einsieht.

Für gerades r größer als 1 ist die Funktion $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\, x)$ auf $(0,\pi)$ monoton fallend, weil ihre Derivierte gleich $-(\psi_{r-1}(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_{r-1};\, x))$, also negativ ist. Bezeichnet $\alpha_{r\delta n}$ wieder den Wert in $\pi/2$, so stimmt das Vorzeichen von $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\, x)-\alpha_{r\delta n}$ überall mit demjenigen von $\cos x$ überein.

Zusammenfassend: *Für die Funktionen*

$$\Phi_{r\delta n}(x)=\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\, x)-\varphi_r\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{\delta n}\left(\varphi_r;\, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\delta, n=1, 2, \ldots)$$

und

$$\Psi_{r\delta n}(x)=\psi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_r;\, x)$$

gilt Folgendes:

$$\operatorname{sgn}\Phi_{r\delta n}(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin x, & \textit{wenn } r=2, 4, 6, \ldots,\\ \operatorname{sgn}\cos x, & \textit{wenn } r=3, 5, 7, \ldots,\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}\Psi_{r\delta n}(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin x, & \textit{wenn } r=1, 3, 5, \ldots,\\ \operatorname{sgn}\cos x, & \textit{wenn } r=2, 4, 6, \ldots\end{cases}$$

[10]) L. FEJÉR, Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, **13** (1933), S. 80—88.

§ 2.

In unseren Problemen dürfen wir offenbar immer annehmen, daß

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Es möge $\mathfrak{K}^{(r)}$ $(r=1,2,\ldots)$ die Klasse derjenigen nach 2π periodischen Funktionen bedeuten, für welche $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ und $|f^{(r)}(x)| \leqq 1$. Wir haben die Größe

$$\varrho_{\delta n}^{(r)} = \max_{f\in\mathfrak{K}^{(r)}}\ \max_x |f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\,x)|$$

und die Funktionen, für die dieses Maximum erreicht wird, zu bestimmen.

Wenn $f(x)\in\mathfrak{K}^{(r)}$ und

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

so ist

$$(-1)^{\frac{r}{2}} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad \text{für gerades } r,$$

$$(-1)^{\frac{r+1}{2}} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \qquad \text{für ungerades } r.$$

Auf Grund des Parsevalschen Satzes ergeben sich leicht die Beziehungen:

$$(1)\ f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\,x) = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\,\Phi_{r\delta n}(y)\,dy \quad \textit{für gerades } r,$$

$$(2)\ f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\,x) = \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\,\Psi_{r\delta n}(y)\,dy \quad \textit{für ungerades } r.$$

Bezeichne $f_r^*(x)$ diejenige in die Klasse $\mathfrak{K}^{(r)}$ gehörige Funktion, für welche

$$(f_r^*(x))^{(r)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} \operatorname{sgn}\cos x, & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \operatorname{sgn}\sin x, & \text{wenn } r \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Da

$$\operatorname{sgn}\cos x \sim \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\cos(2\nu+1)x}{2\nu+1}$$

und

$$\operatorname{sgn}\sin x \sim \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1},$$

so ist

$$f_r^*(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

a) *Fall eines ungeraden r.* Es sei $f(x)$ beliebig aus $\mathfrak{K}^{(r)}$. Aus (2) folgt, mit Rücksicht auf $\operatorname{sgn}\Psi_{r\delta n}(x)=\operatorname{sgn}\sin x=(-1)^{\frac{r+1}{2}}(f_r^*(x))^{(r)}$:

$$|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(r)}(x+y)\,\Psi_{r\delta n}(y)\,dy\right|\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f^{(r)}(x+y)|\,|\Psi_{r\delta n}(y)|\,dy\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\Psi_{r\delta n}(y)|\,dy=\frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{\pi}\int_0^{2\pi}(f_r^*(y))^{(r)}\Psi_{r\delta n}(y)\,dy=f_r^*(0)-\sigma_{\delta n}(f_r^*;0).$$

Wie man sich leicht davon überzeugen kann, besteht hier überall das Gleichheitszeihen in einem Punkte $x=x_0$ nur dann, wenn $f(x)=\pm f_r^*(x-x_0)$ ist.

Hieraus folgt, daß[11])

$$\varrho_{\delta n}^{(r)}=f_r^*(0)-\sigma_{\delta n}(f_r^*;0)=$$
$$=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right]\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}+$$
$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Für den speziellen Fall der Fejérschen Mittel und für $r=1$ erhält man:

$$\varrho_{1n}^{(1)}=\frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2},$$

folglich ist[12])

---

11) Die größte in $\frac{n-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl wird in folgendem mit N bezeichnet.

12) Von hier an werden wir die folgenden Abschätzungen mehrmals anwenden: Ist $p(x)$ auf $(a, a+2h)$ positiv und monoton fallend, so ist $\sum_{\nu=0}^{h-1}p(a+2\nu)\geqq\frac{1}{2}\int_a^{a+2h}p(x)\,dx$; wenn $p(x)$ außerdem nach unten konvex ist, so ist $\sum_{\nu=0}^{h-1}p(a+2\nu+1)\leqq\frac{1}{2}\int_a^{a+2h}p(x)\,dx$; Gleichheit besteht nur im Falle gewisser Treppenfunktionen, bzw. gewisser stückweise linearer stetiger Funktionen.

$$\varrho_{1n}^{(1)} < \frac{4}{\pi(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}\int_1^{2N+2}\frac{dx}{x}\right)+\frac{2}{\pi}\int_{2N+2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{6}{\pi n}$$

und

$$\varrho_{1n}^{(1)} > \frac{2}{\pi(n+1)}\int_1^{2N+3}\frac{dx}{x}+\frac{2}{\pi}\int_{2N+3}^{\infty}\frac{dx}{x^2} > \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{2}{\pi(n+2)}.$$

Ferner hat man

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(1)}-\varrho_{\delta n}^{(1)} = \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{1}{2\nu+1},$$

also

$$0 < \varrho_{\delta+1,n}^{(1)}-\varrho_{\delta n}^{(1)} < \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1} < \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+\delta+1}+\frac{4}{\pi(n+\delta+1)}.$$

Damit ist Satz I bewiesen.

Ist nun r eine ungerade Zahl größer als 1, so hat man

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} = \frac{K^{(r)}}{n+1}-\frac{S_n^{(r)}}{(n+1)^r}$$

mit

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^r} \quad \text{und} \quad S_n^{(r)} = \frac{4}{\pi}(n+1)^{r-1}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^{r+1}};$$

dabei ist

$$0 < S_n^{(r)} < \frac{2}{\pi}(n+1)^{r-1}\int_{2N+3}^{\infty}\frac{dx}{x^r} < \frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Ferner ist

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(r)}-\varrho_{\delta n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{1}{(2\nu+1)^r},$$

also

$$0 < \varrho_{\delta+1,n}^{(r)}-\varrho_{\delta n}^{(r)} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Damit haben wir Satz II für ungerade r bewiesen.

b) *Fall eines geraden* r. Es sei $f(x)$ beliebig aus $\overset{\circ}{\mathfrak{K}}{}^{(r)}$. Es folgt aus (1) und aus $\operatorname{sgn}\Phi_{r\delta n}(x) = \operatorname{sgn}\cos x = (-1)^{\frac{r+1}{2}}(f_r^*(x))^{(r)}$, durch eine zur obigen analoge Rechnung, daß

$$|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)| \leqq f_r^*(0)-\sigma_{\delta n}(f_r^*;0).$$

Gleichheit besteht in einem Punkte $x=x_0$ wieder nur dann, wenn

$f(x)=\pm f_r^*(x-x_0)$ ist. Demnach ist

$$\varrho_{\delta n}^{(r)}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right]\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}}+$$
$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Für die Fejérschen Mittel hat man insbesondere:

$$\varrho_{1n}^{(r)}=\frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r}+$$
$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}}=\frac{K^{(r)}}{n+1}+\frac{R_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}},$$

mit

$$K^{(r)}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r}\quad\text{und}\quad R_n^{(r)}=-\frac{4}{\pi}(n+1)^r\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Da die Funktion $p(s)=\frac{4}{\pi}(n+1)^r\frac{s-n}{(s+1)^{r+1}}$ auf der Halbgeraden $n\leqq s<\infty$ positiv, bis zur Stelle $s_0=n+\frac{n+1}{r}$ wachsend, dann aber fallend ist, so ist $R_n^{(r)}=\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}p(2\nu)$ absolut genommen kleiner als $p(s_0)$, d. h. es ist

$$|R_n^{(r)}|<\frac{4}{\pi}\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}.$$

Man hat ferner

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(r)}-\varrho_{\delta n}^{(r)}=\frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r},$$

also ist

$$0<\varrho_{\delta+1,n}^{(r)}-\varrho_{\delta n}^{(r)}<\frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Hiermit ist Satz II auch für gerade r bewiesen.

§ 3.

Mit $\bar{\mathfrak{K}}^{(r)}$ $(r=1,2,\ldots)$ wollen wir die Klasse derjenigen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit der Fourierreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

bezeichnen, für welche

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx-b_k\cos kx)$$

die Fouriersche Reihe einer zur Klasse $\mathfrak{K}^{(r)}$ gehörigen Funktion $\overline{f}(x)$ ist. Wir haben jetzt die Größen

$$\overline{\varrho}_{\delta n}^{(r)} = \max_{f \in \overline{\mathfrak{K}}^{(r)}} \max_{x} |f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x)|,$$

sowie die Funktionen, für die diese Maxima erreicht werden, zu bestimmen.

Wenn $f(x) \in \overline{\mathfrak{K}}^{(r)}$, dann gilt im Falle eines geraden r:

$$(-1)^{\frac{r}{2}}\, \overline{f}^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r\, (a_k \sin kx - b_k \cos kx),$$

und im Falle eines ungeraden r:

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}}\, \overline{f}^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r\, (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Auf Grund des Parsevalschen Satzes ergeben sich die Beziehungen:

$$(3)\quad f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x) = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}^{(r)}(x+y)\, \Psi_{r\delta n}(y)\, dy \quad \textit{für gerades } r,$$

$$(4)\quad f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x) = \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}^{(r)}(x+y)\, \Phi_{r\delta n}(y)\, dy \quad \textit{für ungerades } r.$$

Sei $g_r^*(x)$ diejenige zu $\overline{\mathfrak{K}}^{(r)}$ gehörige Funktion, für welche

$$\overline{g}_r^{*(r)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} \operatorname{sgn} \sin x, & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} \operatorname{sgn} \cos x, & \text{wenn } r \text{ ungerade ist;} \end{cases}$$

d. h, es sei

$$g_r^*(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu r} \frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Durch eine schon angewendete Schlußweise erhalten wir aus (3) und (4), mit Rücksicht auf unsere Feststellungen betreffend das Vorzeichen der Funktionen Φ und Ψ in § 1, daß

$$|f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x)| \leqq g_r^*(0) - \sigma_{\delta n}(g_r^*;\, 0)$$

für $r = 2, 3, \ldots$ und für $\delta, n = 1, 2, \ldots$, und daß das Gleichheitszeichen in einem Punkte $x = x_0$ nur dann gilt, wenn $f(x) = \pm g_r^*(x - x_0)$ ist. Demnach ist

$$\overline{\varrho}_{\delta n}^{(r)} = g_r^*(0) - \sigma_{\delta n}(g_r^*;\, 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{N} \left[1 - \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right] \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Abschätzungen auf Grund dieser Reihendarstellung ergeben sich, wie für die $\varrho_{\delta n}^{(r)}$ in § 2, nur hat man die Rolle gerader und ungerader r zu vertauschen.

Damit ist auch Satz IV bewiesen.

§ 4.

Es bleibt nur noch übrig, Satz III zu beweisen.

Die Abschätzungen der $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$ von unten folgen leicht, wenn man die Abweichung der speziellen Funktion $f(x)=\cos x$ aus $\bar{\mathfrak{K}}^{(1)}$ von ihren Mitteln $\sigma_{\delta n}(f; x)$ im Punkte $x=0$ ausrechnet.

Die Beziehung (4) gilt auch für $r=1$. Ehe wir aber auf diesem Grund weitergehen, müssen wir das Vorzeichen der Funktion $\Phi_{1\delta n}$ diskutieren.

Da auf $(0, 2\pi)$ gilt: $\varphi_1(y)=-\log\left(2\sin\frac{y}{2}\right)$, so hat man

$$\Phi'_{11n}(y)=(\varphi_1(y)-\sigma_{1n}(y))'=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{y}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\sin ky=$$
$$=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{y}{2}+\frac{(n+1)\sin y-\sin(n+1)y}{4(n+1)\sin^2\frac{y}{2}}=-\frac{1}{n+1}\,\frac{\sin(n+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}}.\text{[13]}$$

Wegen der rekursiven Beziehung

$$\binom{n+\delta+1}{n}\sigma_{\delta+1,n}=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+\delta}{m}\sigma_{\delta m}$$

zwischen den Cesàroschen Mitteln erhält man

$$\binom{n+2}{2}\Phi'_{12n}(y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+1}{1}\Phi'_{11m}(y)=-\frac{\sum_{m=0}^{n}\sin(m+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}}$$

und

$$\binom{n+3}{3}\Phi'_{13n}(y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+2}{2}\Phi'_{12m}(y)=-\frac{\sum_{m=0}^{n}(n+1-m)\sin(m+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}},$$

also ist $\Phi'_{13n}(y)$ auf $(0,\pi)$ negativ[14]). Dann ist aber auch $\Phi'_{1\delta n}(y)$ mit

[13]) Die Summenformel von $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin ky$, aus welcher sich auch die Positivität dieser Summe auf $(0,\pi)$ ergibt, wurde zuerst von F. Lukács gefunden, vgl. P. Turán, Über die arithmetischen Mittel der Fourier-Reihe, *Journal London Math. Soc.*, **10** (1935), S. 277—280.

[14]) Siehe Anm. [13]).

$\delta > 3$ auf $(0, \pi)$ negativ. Da $\Phi_{1\delta n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ist $\operatorname{sgn} \Phi_{1\delta n}(y) = \operatorname{sgn} \cos y$ für jedes y und für $\delta \geqq 3$.

Wenn also $\delta \geqq 3$, dann kann man denselben Schluß anwenden, wie in den vorigen §-en. Für $\bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n}$ ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck, wie für die übrigen $\bar{\varrho}^{(r)}_{\delta n}$ mit ungeradem r (siehe § 3). Die extremalen Funktionen sind die Funktionen $g_1^*(x - x_0)$.

Da, wie man leicht nachrechnet, für jedes δ gilt:

$$\sigma_{\delta n}(g_1^*; 0) - \sigma_{\delta+1, n}(g_1^*; 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi(n+\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{N}\left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right) \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} =$$

$$= \frac{1}{n+\delta+1} \sigma_{\delta n}(\operatorname{sgn} \cos;\, 0) \begin{cases} > 0 \\ < \dfrac{1}{n+\delta+1} \end{cases},$$

so ist für $\delta \geqq 3$:

$$0 < \bar{\varrho}^{(1)}_{\delta+1, n} - \bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n} < \frac{1}{n+\delta+1};$$

ferner ist

$$\bar{\varrho}^{(1)}_{3n} = g_1^*(0) - \sigma_{3n}(g_1^*; 0) = (g_1^*(0) - \sigma_{1n}(g_1^*; 0)) + (\sigma_{1n} - \sigma_{2n}) + (\sigma_{2n} - \sigma_{3n}) <$$

$$< \left(\frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} - \frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu - n}{(2\nu+1)^2}\right) + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3},$$

also

$$\bar{\varrho}^{(1)}_{3n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\pi(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} < \frac{3}{n+1}.$$

(Die zweite Summe wurde dabei auf ähnliche Weise abgeschätzt, wie die Größe $R_n^{(r)}$ in § 2.)

Aus unseren Formeln für die Derivierten von $\Phi_{11n}(y)$ und $\Phi_{12n}(y)$ sieht man leicht, daß diese Funktionen nicht das Vorzeichen von $\cos x$ haben, ihre Nullstellen hängen sogar vom Index n ab. Diese Tatsache läßt vermuten, daß in diesen Fällen keine von n unabhängige Extremale mehr gibt.

Die Abschätzungen $\bar{\varrho}^{(1)}_{1n} < \frac{3}{n+1}$ und $\bar{\varrho}^{(1)}_{2n} < \frac{4}{n+1}$ ergeben sich aus dem folgenden Hilfssatz über numerische Reihen, wenn man diesen auf die Fouriersche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ der in die Klasse gehörigen stetigen Funktion $f(x)$ anwendet, und bemerkt, daß die Fejérschen Mittel der Fourierschen Reihe von $\bar{f}'(x)$, d. h. der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, im Absolutwert unterhalb $\max |\bar{f}'|$, also unterhalb 1 bleiben.

Hilfssatz. *Sind die Cesàroschen Mittel erster Ordnung* σ'_{1n} *der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} k u_k$ *im Absolutwert nicht größer als* 1, *so streben die Cesàroschen Mittel erster Ordnung* σ_{1n} *der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *gegen einen endlichen Wert* U, *und man hat* $|U-\sigma_{1n}|<\frac{3}{n+1}$. *Für die Mittel zweiter Ordnung* σ_{2n} *gilt:* $|U-\sigma_{2n}|<\frac{4}{n+1}$.[15])

Mit den Bezeichnungen $s_k=\sum_{h=0}^{k} h u_h$ und $d_k=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ hat man: $\sigma'_{1k}=\frac{1}{k+1}\sum_{h=0}^{k} s_h$, ferner für $p>n>0$

$$\sigma_{1p}-\sigma_{1n}=\sum_{k=0}^{p}\left(1-\frac{k}{p+1}\right)u_k-\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{p} u_k-\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} k u_k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k u_k=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{p}\frac{s_k-s_{k+1}}{k}-\frac{s_p}{p+1}+\frac{s_n}{n+1}=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{p} d_k s_k=\sum_{k=n+1}^{p} d_k((k+1)\sigma'_{1k}-k\sigma'_{1,k-1})=$$

$$=-d_{n+1}(n+1)\sigma'_{1n}+(d_{n+1}-d_{n+2})(n+2)\sigma'_{1,n+1}+\ldots+$$
$$+(d_{p-1}-d_p)p\sigma'_{1,p-1}+d_p(p+1)\sigma'_{1p}.$$

Wegen $|\sigma'_{1k}|\leqq 1$ und $d_k-d_{k+1}>0$ folgt hieraus, daß

$$|\sigma_{1p}-\sigma_{1n}|\leqq d_{n+1}(n+1)+(d_{n+1}-d_{n+2})(n+2)+\ldots+(d_{p-1}-d_p)p+d_p(p+1)=$$
$$=(2n+3)d_{n+1}+d_{n+2}+d_{n+3}+\ldots+d_p=(2n+3)d_{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{p+1}.$$

Hieraus sieht man, daß die Folge σ_{1p} konvergent ist, und, wenn der Limes mit U bezeichnet wird, dann gilt:

$$|U-\sigma_{1n}|\leqq(2n+3)d_{n+1}+\frac{1}{n+2}<\frac{3}{n+1}.$$

Die Abschätzung

$$|U-\sigma_{2n}|<\frac{4}{n+1}$$

folgt endlich auf Grund der Beziehung

$$\sigma_{1n}-\sigma_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k-\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+2}\right)u_k=$$
$$=\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)k u_k=\frac{1}{n+2}\sigma'_{1n}.$$

Damit wurde auch der Satz III vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 15. Juni 1944.)

---

[15]) A. a. O. [7]) beweist ALEXITS auf anderem Weg, daß $|U-\sigma_{1n}|<\frac{4}{n}$.

Über eindeutig umkehrbare Polynome in endlichen Körpern.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Wir legen einen endlichen Körper k mit q Elementen und der Charakteristik p zu Grunde und nennen ein (ganzes oder gebrochenes) Polynom[1]) $f(x)$ umkehrbar (nämlich eindeutig umkehrbar), wenn $y=f(x)$ für jedes y eine, folglicherweise nur eine Lösung hat. Mit anderen Worten heißt das, daß die Abbildung $x \to f(x)$ eine Permutation der Elemente von k ist. Wohlbekannte wichtige Beispiele sind die linearen ganzen Polynome. Allgemein ist mit $f(x)$ und $g(x)$ auch $f(g(x))$ umkehrbar. Aus beiden folgt, daß mit $f(x)$ auch alle

$$Tf(Sx) \tag{1}$$

umkehrbar sind, wobei S und T beliebige (nichtsinguläre) lineare ganze Substitutionen bedeuten. Bekantlich ist x^n dann und nur dann umkehrbar, wenn $(n, q-1)=1$ ist.

Für viele Zwecke erweitert man k durch Hinzunahme eines unendlichen Elementes ∞ mit den üblichen Rechnungsregeln zu einer Menge k'. Das bisherige behält auch für k' statt k seinen guten Sinn, und dabei werden sogar die gebrochenen linearen Polynome $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc \neq 0)$ umkehrbar (in k'). Entsprechend läßt sich das über (1) gesagte für die gebrochenen linearen Substitutionen verallgemeinern. Sind S und T solche Substitutionen, so nennen wir bei festem $f(x)$ alle Polynome (1) äquivalent, insbesondere im Fall $T=S^{-1}$ ähnlich. Äquivalente Polynome sind also gleichzeitig umkehrbar in k'. Umkehrbarkeit von $f(x)$ für k und k' kommen auf dasselbe hinaus dann und nur dann, wenn der Zähler von $f(x)$ von größerem Grad als der Nenner, d. h. $f(\infty)=\infty$ ist. Da letzteres für ein passendes $Sf(x)$ statt $f(x)$ der Fall ist, so läßt sich die Frage der Umkehrbarkeit auf die in k zurückführen.

[1]) „Gebrochenes Polynom" bedeutet den Quotienten zweier ganzen Polynome.

Beschränkt man sich auf die Polynome vom Grad $\leqq q-1$, was offenbar gestattet ist, so sind alle verschiedenen umkehrbaren ganzen Polynome bekanntlich durch

$$\sum \bar{a}_i[1-(x-a_i)^{q-1}] \tag{2}$$

angegeben, wobei man über alle Elemente $a_1, \ldots, a_q$ von k zu summieren hat und $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_q$ eine Permutation von ihnen ist. Somit gibt es insgesamt $q!$ solche Polynome. Für (2) läßt sich übrigens im Fall $q>2$ wegen $\sum a_i=0$ und $(x-a_i)^q=x^q-a_i^q$ die durchsichtigere Form

$$-\sum \bar{a}_i x^{q-1}-\sum \bar{a}_i a_i x^{q-2}-\ldots-\sum \bar{a}_i a_i^{q-1} \tag{2'}$$

geben. Zu (2) ähnlich sind die

$$\frac{1}{h(x)}\sum \bar{a}_i h(a_i)[1-(x-a_i)^{q-1}] \tag{3}$$

alle (ganzen und gebrochenen) umkehrbaren Polynome vom Grad $\leqq q-1$, wobei $h(x)$ alle nullstellenfreien ganzen Polynome vom Grad $\leqq q-1$ bedeutet. (Natürlich brauchen hier Zähler und Nenner nicht teilerfremd zu sein, und so ist in (3) über Eindeutigkeit keine Rede mehr.)

Diese Formeln scheinen aber wenig geeignet zu sein, um aus ihnen in unserer Frage weitere Folgerungen zu ziehen. Auf anderem Wege werden wir gewinnen den folgenden

Satz. *Es sei $p \neq 2$ und bedeute n eine natürliche Zahl mit $(n, q+1)=1$. Man wähle ein Nichtquadratelement α in k und setze*

$$g(x)=\sum_{i\geqq 0}\binom{n}{2i}\alpha^i x^{n-2i}, \quad h(x)=\sum_{i\geqq 0}\binom{n}{2i+1}\alpha^i x^{n-2i-1} \tag{4}$$

d. h. in durchsichtigerer Form

$$(x+\sqrt{\alpha})^n=g(x)+h(x)\sqrt{\alpha} \qquad (g(x), h(x) \text{ Polynome in } k), \tag{4'}$$

welche letztere Gleichung natürlich im endlichen Körper k_2 vom zweiten Grade über k zu deuten ist. Dann ist das gebrochene Polynom

$$f_n(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \tag{5}$$

vom Grade n und umkehrbar in k. Dabei hängt $f_n(x)$ von α nur unwesentlich ab, da es bei Ersetzung von α durch $\alpha\beta^2$ $(\beta \neq 0)$ in das äquivalente Polynom $\beta f_n\left(\frac{x}{\beta}\right)$ übergeht. Deshalb werde α im folgenden festgehalten.

Bezeichnet P_n die Permutation $x \to f_n(x)$ der Elemente von k, so ist ihre Ordnung die kleinste natürliche Zahl r mit

$$n^r \equiv 1 \pmod{q+1}, \tag{6}$$

d. h. r ist der zu n gehörende Exponent für den Modul $q+1$. Folglich ist die Ordnung von P_n ein Teiler der Eulerschen Funktion $\varphi(q+1)$. Insbesondere ist also $P_n=1$ dann und nur dann, wenn $q+1 \mid n-1$.

Alle verschiedenen P_n (bei festem k und α) bilden eine Abelsche Gruppe der Ordnung $\varphi(q+1)$ nach der Produktregel

$$P_m P_n = P_{mn} \tag{7}$$

mit der Ergänzung, daß jede der Aussagen

$$P_m = P_n, \quad m \equiv n \pmod{q+1} \tag{8}$$

eine Folge der anderen ist.[2])

Über (7) hinaus gilt

$$f_m(f_n(x)) = f_{mn}(x). \tag{9}$$

Zum Beweis schicken wir die Bemerkung voraus: Alle n-ten Einheitswurzeln in k_2 liegen schon in k.

Ist nämlich $\varrho^n=1$ (ϱ in k_2), so läßt sich hier n durch

$$d=(n, q^2-1)=(n,(q+1)(q-1))=(n, q-1)$$

ersetzen. Da aber die Gleichung $x^d=1$ wegen $d \mid q-1$ so viel Wurzeln in k hat, wie der Grad ist, muß ϱ in der Tat in k liegen.

Jetzt zeigen wir zunächst, daß $f_n(x)$ wirklich vom Grade n ist. Sonst hätten nämlich $g(x)$, $h(x)$ einen gemeinsamen Teiler (in k), der aber auch in der linken Seite von (4′) aufgehen muß. Dieser offenbare Widerspruch beweist die Behauptung.

Dann haben wir zu zeigen, daß $h(x)$ nullstellenfrei ist. Deshalb werde $h(\xi)=0$ mit einem ξ in k angenommen. Nach (4′) gilt dann

$$(\xi+\sqrt{\alpha})^n = g(\xi). \tag{10}$$

Durch Normenbildung folgt hieraus, daß zunächst $g^2(\xi)$, gleichzeitig also wegen $2 \nmid n$ auch $g(\xi)$ eine n-te Potenz in k ist. Das ergibt nach (10)

$$\left(\frac{\xi+\sqrt{\alpha}}{\eta}\right)^n = 1$$

mit einem η in k. Da aber der Klammerausdruck in k_2 und nicht in k ist, haben wir mit obiger Bemerkung einen Widerspruch erhalten und so die Behauptung bewiesen.

Hiernach existiert $f_n(x)$ für jedes x in k. Zeigen wir also, daß $f_n(x)$ in k keinen Wert zweimal annimmt, so wird daraus schon die Umkehrbarkeit von ihr folgen.

Zu diesem Zweck schreiben wir die Definition von $f_n(x)$ nach (4′)

---

[2]) Somit ist die Gruppe der P_n isomorph zur Gruppe der primen Restklassen mod $q+1$.

und (5) in der Form

$$(11)\qquad \left(\frac{x+\sqrt{\alpha}}{x-\sqrt{\alpha}}\right)^n=\frac{f_n(x)+\sqrt{\alpha}}{f_n(x)-\sqrt{\alpha}}.$$

Wird also $f_n(\xi)=f_n(\eta)$ angenommen mit ξ, η in k, so gilt

$$\left(\frac{(\xi+\sqrt{\alpha})(\eta-\sqrt{\alpha})}{(\xi-\sqrt{\alpha})(\eta+\sqrt{\alpha})}\right)^n=1.$$

Wieder nach der vorangeschickten Bemerkung muß hier die Basis der Potenz in k liegen. Da aber Zähler und Nenner konjugiert sind und ersterer gleich

$$(\xi\eta-\alpha)+(\eta-\xi)\sqrt{\alpha}$$

ist, so folgt, daß hier der eine Klammerausdruck verschwindet. Der erste verschwindet nicht, denn dann wäre obige Potenz $(-1)^n=-1\,(\neq 1)$. Also ist $\xi=\eta$. Hiermit haben wir bewiesen, daß $f_n(x)$ umkehrbar ist.

Nach (11) ist

$$\frac{f_{mn}(x)+\sqrt{\alpha}}{f_{mn}(x)-\sqrt{\alpha}}=\left(\left(\frac{x+\sqrt{\alpha}}{x-\sqrt{\alpha}}\right)^n\right)^m=\left(\frac{f_n(x)+\sqrt{\alpha}}{f_n(x)-\sqrt{\alpha}}\right)^m=\frac{f_m(f_n(x))+\sqrt{\alpha}}{f_m(f_n(x))-\sqrt{\alpha}}.$$

Dies beweist (9), also auch (7).

Die Behauptung über (8) beweisen wir so. Zu $P_m=P_n$ ist notwendig und hinreichend, daß $f_m(\xi)=f_n(\xi)$ d. h. nach (11)

$$(12)\qquad \left(\frac{\xi+\sqrt{\alpha}}{\xi-\sqrt{\alpha}}\right)^m=\left(\frac{\xi+\sqrt{\alpha}}{\xi-\sqrt{\alpha}}\right)^n$$

für jedes ξ in k gilt. Wir bezeichnen mit m_0, n_0 den kleinsten nichtnegativen Rest von m bzw. n mod q^2-1. Dann dürfen wir in (12) m, n durch m_0, n_0 ersetzen, weil $\dfrac{\xi+\sqrt{\alpha}}{\xi-\sqrt{\alpha}}$ in k_2 und $\neq 0$ ist. Zugleich nehmen wir $m_0\leqq n_0$ an, das offenbar gestattet ist, und setzen

$$(13)\qquad n_0-m_0=qu+v \qquad (0\leqq u,\ v\leqq q-1).$$

Dann lautet (12):

$$(14)\qquad \left(\frac{\xi+\sqrt{\alpha}}{\xi-\sqrt{\alpha}}\right)^{qu+v}=1.$$

Da aber $x\to x^q$ der einzige nicht identische Automorphismus des Relativkörpers k_2/k ist, schreibt sich (14) anders so:

$$(15)\qquad \left(\frac{\xi+\sqrt{\alpha}}{\xi-\sqrt{\alpha}}\right)^{v-u}=1.$$

Und zwar ist das Bestehen von (15) für alle ξ in k notwendig und hinreichend, damit $P_m=P_n$ ist. Da aber $x^{v-u}=1$ wegen $|v-u|\leqq q-1$

nur im Fall $v-u=0$ q verschiedene Wurzeln haben kann, so haben wir für $P_m = P_n$ die notwendige und hinreichende Bedingung $u=v$ erhalten. Dies findet nach (13) dann und nur dann statt, wenn $q+1 \mid n_0 - m_0$ d. h. $q+1 \mid n-m$ ist. Damit haben wir (8) bewiesen.

Hieraus folgt auch schon, daß es insgesamt nur $\varphi(q+1)$ verschiedene P_n gibt. Es ist also nur noch übrig die Ordnung von P_n zu bestimmen. Diese ist die kleinste natürliche Zahl r, für die $P_n^r = 1$, d. h. nach (7) $P_{n^r} = 1$ gilt. Wieder nach (7) ist $P_1 P_n = P_n$, $P_1 = 1$, und somit lautet vorige Gleichung: $P_{n^r} = P_1$. Nach (8) darf man hierfür (6) schreiben, und das bedeutet eben, daß die Behauptung über die Ordnung von P_n richtig ist. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Hierzu mögen noch einige Bemerkungen stehen:

a) *Ist $p \neq 2$, so gibt es in k zu jedem ungeraden Grad n umkehrbare (ganze oder gebrochene) Polynome.*

Zerlegen wir nämlich n in zwei Faktoren μ, ν so, daß $(\mu, q-1) = (\nu, q+1) = 1$ ist. Das ist wegen $(q-1, q+1) = 2$ im allgemeinen sogar auf mehrere Arten möglich. Dann ist $f_\nu(x^\mu)$ [desgleichen auch $(f_\nu(x))^\mu$] in der Tat umkehrbar, vom Grade $\mu\nu = n$.

b) *Ist $p \neq 2$, so gibt es in k kein umkehrbares Polynom zweiten Grades.*

Es sei nämlich

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \tag{16}$$

umkehrbar in k, wobei $g(x)$, $h(x)$ ganze Polynome sind und (indem man gleich $f(\infty) = \infty$ annimmt) vom Grade 2 bzw. $\leqq 1$. Dann hat die Gleichung

$$g(x) - y h(x) = 0 \tag{17}$$

für jedes y in k genau eine Lösung. Bezeichnet $D(y)$ die nach x genommene Diskriminante dieser Gleichung, so muß also $D(y) = 0$ für jedes y gelten. Das ist aber ein Widerspruch, da $D(y)$ offenbar vom ersten oder zweiten Grade ist. (Man hätte **b)** auch einfacher beweisen können.)

c) *Ist $p \neq 2, 3$ und $q \geqq 11$, so gibt es in k kein umkehrbares ganzes Polynom vierten Grades.* Läßt man auch die gebrochenen Polynome zu, so bleibt das für hinreichend große q vermutlich immer noch richtig.

Nehmen wir hierzu ein umkehrbares Polynom $f(x)$ vom vierten Grade wieder in der Form (16) an, wobei jetzt $g(x)$, $h(x)$ vom Grade 4 bzw. $\leqq 3$ ist. Wieder hat dann (17) für jedes y genau eine Lösung. Bei nichtverschwindender Diskriminante $D(y)$ von (17) ist das nach einer Arbeit[3]) von mir (wegen $p \neq 2, 3$) dann und nur dann der Fall, wenn die kubische Resolvente von (17) keine Lösung hat, woraus ebenfalls nach [3]) folgt, daß $D(y)$ [das ja auch die Diskriminante dieser Resolvente ist] ein Quadratelement sein muß. Das ist im Fall $D(y)=0$ von selbst erfüllt, gilt also allgemein.

Nunmehr sei $f(x)$ ganz. Dann ist $h(x)$ eine Konstante (wofür man auch 1 nehmen kann) und somit $D(y)$ vom dritten Grade. Als schwache Folgerung aus einem Satz von HASSE[4]) nimmt aber $D(y)$ [im Fall $p \neq 2, 3$; $q \geqq 11$] nicht nur Quadratelemente an, woraus unsere Behauptung folgt.

Ist dagegen $f(x)$ gebrochen, so ist $D(y)$ im allgemeinen vom sechsten Grade. Man kann weiter nicht mehr so schließen wie im vorigen Fall, da Hasses Satz sich nur auf Polynome vom Grade 3 und 4 bezieht. Es scheint aber, daß zum vollständigen Beweis obiger Vermutung nicht viel fehlt.

d) Unseren Satz können wir wie folgt in ein schärferes Licht setzen. Führen wir die lineare Substitution S in k_2 mit

$$Sz=\frac{z+\sqrt{a}}{z-\sqrt{a}}$$

ein. Dann läßt sich (11) so schreiben: $(Sx)^n = Sf_n(x)$, d. h.

$$f_n(x)=S^{-1}(Sx)^n .$$

Hiernach hat das Polynom $f_n(x)$ im Oberkörper k_2 eine einfache Deutung bekommen, woraus man insbesondere sieht, daß *$f_n(x)$ in k_2 ein zu x^n ähnliches Polynom ist.* (Selbst x^n braucht dabei weder in k noch in k_2 umkehrbar zu sein!) Weniger genau kann man sagen, daß unsere expliziten Beispiele für umkehrbare Polynome im wesentlichen (nämlich von linearen Substitutionen abgesehen) nur die Potenzen x^n sind, wenn man auf obige Weise in den Oberkörper k_2 hinausgreift. Das läßt vermuten, daß mit Hilfe anderer Oberkörper von k sich weitere umkehrbare Polynome in k konstruieren lassen, mir ist aber etwas solches nicht gelungen.

e) Hier wollen wir auf eine an sich sehr merkwürdige Erscheinung hinweisen betreffend alle Polynome $f(x)$ vom dritten Grade in k mit $p \neq 2, 3$, wobei wir uns wieder auf den Fall $f(\infty)=\infty$ beschränken dürfen. *Unter ihnen nehmen* nähmlich *x^3 und das Polynom in* (5)

[3]) L. RÉDEI, Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern, *dieser Band*, S. 96—105.

[4]) H. HASSE, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **10** (1934), S. 325—348, insb. S. 347.

$\left[f_3(x)=\right] \dfrac{x^3+3\alpha x}{3x^2+\alpha}$ *eine Sonderstellung ein, und diese zwei stehen einander* gewissermaßen *dual gegenüber,* wie wir das hier näher ausführen wollen.

Es bezeichne $[f]_i$ $(i=0,\ldots,4)$ die Anzahl der i-fachen Elemente des Wertevorrats von $f(x)$. (Insbesondere bezeichnet $[f]_0$ die Anzahl der Elemente von k, die durch $f(x)$ nicht angenommen werden.) Zu äquivalenten Polynomen gehören dieselben Zahlen $[f]_i$. Weiter ist $f(x)$ offenbar dann und nur dann umkehrbar in k, wenn $[f]_1=q$ ist.

In einer Arbeit[5]) werde ich unter anderem die $[f]_i$ genau berechnen. Hieraus entnimmt man folgende Abschätzungen:

$$\begin{gathered}\left|[f]_0-\frac{q}{3}\right|\leqq\frac{2}{3}\sqrt{q}+\frac{2}{3},\quad \left|[f]_1-\frac{q}{2}\right|\leqq\sqrt{q}+2,\quad [f]_2\leqq 4,\\ \left|[f]_3-\frac{q}{6}\right|\leqq\frac{1}{3}\sqrt{q}+\frac{8}{3},\end{gathered}\tag{18}$$

ausgenommen x^3 und $\dfrac{x^3+3\alpha x}{3x^2+\alpha}$ (und die äquivalenten Polynome). Für diese zwei verhalten sich die Zahlen $[f]_i$ scharf abweichend nach den Angaben folgender Tabelle:

	$[f]_0$	$[f]_1$	$[f]_2$	$[f]_3$	
Für x^3	0	q	0	0	$(3\mid q+1)$
	$\frac{2q-2}{3}$	1	0	$\frac{q-1}{3}$	$(3\mid q-1)$.
Für $\frac{x^3+3\alpha x}{3x^2+\alpha}$	$\frac{2q+2}{3}$	0	0	$\frac{q-2}{3}$	$(3\mid q+1)$
	0	q	0	0	$(3\mid q-1)$.

Die erste und vierte Zeile dieser Tabelle drückt die schon bekannte Tatsache aus, daß x^3 im Fall $3\mid q+1$ bzw. $\dfrac{x^3+3\alpha x}{3x^2+\alpha}$ im Fall $3\mid q-1$ umkehrbar ist. Im ganzen zeigt aber die Tabelle, daß diese zwei Polynome (was die Vielfachheitszahlen $[f]_i$ anbelangt) ihre Rollen vertauschen, wenn man vom Fall $3\mid q+1$ zum Fall $3\mid q-1$ übergeht. Die Sonderstellung dieser zwei Polynome tritt durch die Bemerkung noch klarer hervor, daß es unter den übrigen Polynomen dritten Grades für $q\geqq 11$ keine umkehrbaren gibt, wie man es aus (18) sieht.

f) Nach der Arbeit [3]) können wir die Gleichung

$$\frac{x^3+3\alpha x}{3x^2+\alpha}=y$$

[5]) L. Rédei, Über die Charaktersummen von Hasse und den Wertevorrat der Polynome dritten und vierten Grades in endlichen Körpern. (In Vorbereitung.)

im Fall $3|q-1$ (dann ist die linke Seite umkehrbar) leicht nach x auflösen. Das ergibt

$$x=y+(y^2-\alpha)^{\frac{q-1}{3}}[(y+\sqrt{\alpha})^{\frac{q+2}{3}}+(y-\sqrt{\alpha})^{\frac{q+2}{3}}] \qquad (3|q-1),$$

wie man es auch direkt leicht bestätigt. Die rechte Seite — die offenbar ein Polynom q-ten Grades in k ist, da die ungeraden Potenzen von $\sqrt{\alpha}$ herausfallen — ist also umkehrbar.

(Eingegangen am 21. Juli 1944.)

Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt.

Von LÁSZLÓ FEJES in Kolozsvár.

In einem hinreichend großen Quadrat vom Inhalt T können höchstens $n \sim \frac{\sqrt{3}\pi}{6} T$ kongruente Ellipsenscheiben vom Inhalt 1 gesondert eingelagert werden. Genauer: die Dichte eines Systems kongruenter Ellipsen, die keine inneren Punkte gemein haben, ist unabhängig von der Exzentrizität und der Anordnung der Ellipsen $\leqq \sqrt{3}\pi/6$ $(=0{\cdot}907\ldots)$.[1]) Ersetzt man dagegen die Ellipsen durch beliebige andere kongruente Eibereiche, so gibt es nach einer Vermutung von R. COURANT[2]) schon eine gitterförmige Anordnung derselben mit einer Dichte, die $> \sqrt{3}\pi/6$ ausfällt.

Betrachten wir nun ein System kongruenter Ellipsen, das die Ebene lückenlos bedeckt. Setzen wir noch voraus, daß die Ellipsen sich in höchstens zwei Punkten schneiden[3]), so läßt sich zeigen, daß die Dichte dieses Systems $\geqq 2\sqrt{3}\pi/9$ $(= 1{\cdot}209\ldots)$ ist[4]). Nun gilt für Bereiche mit Mittelpunkt folgender, der Courantschen Vermutung dual gegenüberstehender

Satz. *Ist B ein konvexer Bereich mit Mittelpunkt, das nicht von einer Ellipse begrenzt ist, so gibt es eine gitterförmige Bedeckung der Ebene durch zu B kongruente Bereiche mit einer Dichte* $< 2\sqrt{3}\pi/9$.

---

1) Für Ellipsen in paralleler Lage folgt dies aus der Lösung des Problems der dichtesten Kreislagerung. Zum allgemeinen Fall s. L. FEJES, Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben, *Acta Sci. Math. Nat.*, 23 (Kolozsvár, 1944), S. 15.

2) W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin, 1923, S. 65.

3) Diese Einschränkung ist wahrscheinlich überflüssig.

4) S. die in 1) zitierte Arbeit, S. 17. Für Kreise wurde dies zum erstenmal von R. KERSHNER, [The number of circles covering a set, *Amer. J. Math.*, 61 (1939), S. 665—671] bewiesen. Diese Ungleichung — sowie die oben angegebene — gilt auch für inkongruente flächengleiche Ellipsen von gleichmäßig beschränktem Umfang.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung der Sasschen Konstruktion[5]), aus der hervorgeht, daß in B stets ein größeres Sechseck mit Mittelpunkt eingeschrieben werden kann, als in eine flächengleiche Ellipse. Die verlangte Bedeckung erfolgt durch die Auspflasterung der Ebene durch diese Sechsecke.

Hieraus ergibt sich folgendes — in gewisser Hinsicht scheinbar allgemeineres — Korollar: *Durch ein System großer Anzahl konvexer Figuren mit Mittelpunkt, deren Umfang unterhalb einer vorgegebenen Schranke L bleibt, läßt sich ein im Endlichen liegendes ebenes Gebiet vorgegebener Gestalt vom Inhalt* $T \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} F$ $(= 0{\cdot}83 \ldots F)$ *überdecken, wobei F die Inhaltssumme der Figuren bedeutet.* Die Figuren lassen sich nämlich für ein beliebiges positives ε (nach bekannten Sätzen über kompakte Mengen und dem Blaschkeschen Auswahlsatz) in eine nur von ε und L abhängige Anzahl von Teilsystemen derart eingliedern, daß die Figuren eines Teilsystems weniger als ε von einander (im gebräuchlichen Sinn) abweichen. Um die Richtigkeit unserer Behauptung einzusehen, bedecke man durch jedes Teilsystem je einen geeigneten Teilbereich des Gebiets.

Ob das alles auch für Bereiche ohne Mittelpunkt gilt, steht noch nicht fest.

Zum Schluß sei bemerkt, daß zum Beweis der Courantschen Vermutung das umgeschriebene Sechseck heranzuziehen versucht werden sollte. Dies scheint aber Schwierigkeiten zu bereiten[6]). Allerdings sei bemerkt, daß unter den flächengleichen konvexen Bereichen der Inhalt des kleinsten umgeschriebenen n-Ecks im allgemeinen nicht für die Ellipsen den größtmöglichen Wert besitzt. Für $n=3$ ist z. B. der extremale Bereich das Parallelogramm (s. [2]), S. 64). Dagegen liefert die Ellipse schon von $n=3$ ab das Extremum der analogen Aufgabe für das eingeschriebene n-Eck[7]).

(Eingegangen am 21. Juli 1944.)

B e m e r k u n g w ä h r e n d d e r K o r r e k t u r. Eine Anordnung von Bereichen heißt in üblicher Weise gitterförmig, falls jedes Bereich sich von einem festen durch wiederholte Anwendung von zwei eben-

---

[5]) E. SAS, Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen, *Comp. Math.*, **6** (1939), S. 468—470.

[6]) Vgl. L. FEJES, Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe, *Comp. Math.*, 7 (1940), S. 474—476.

[7]) Für $n=3$ wurde dies von BLASCHKE (s. [2]), § 22, S. 49) bewiesen.

falls festen Verschiebungen, oder ihren Inversen, erzeugen läßt. Dies festgelegt bemerken wir, daß die maximale Dichte eines gitterförmigen Systems gesonderter Dreiecke — wie leicht einzusehen ist — 2/3 beträgt, was die Courantsche Vermutung widerlegt. Um die Wahrscheinlichkeit der Extremaleigenschaft der Ellipsen aufrechtzuerhalten, sollte daher in der Courantschen Vermutung entweder die Einschränkung auf Bereiche mit Mittelpunkt gemacht werden, oder sollten statt gitterförmigen Anordnungen auch die umfassendere regelmäßige Bereichlagerungen (s. z. B. HILBERT—COHN-VOSSEN, Anschauliche Geometrie, Berlin, 1932, §. 9—12) zugelassen werden. Die Frage, ob in der ursprünglichen Fassung des Problems von COURANT das Dreieck das extremale Gebiet ist, bleibt noch zu untersuchen.

Analoges läßt sich bezüglich der Probleme der dünnsten Bedeckung der Ebene aussagen. Unser Satz gilt daher ohne die Beschränkung auf Bereiche mit Mittelpunkt nicht mehr. Dagegen ist zu erwarten, daß das obige Korollar ihre Gültigkeit — da dort von irgendeiner gitterförmigen Lagerung gar keine Rede ist — auch für allgemeine konvexe Bereiche behält.

Übrigens vgl. den ganzen Aufsatz mit H. HADWIGER, Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate, *Comm. Math. Helv.*, **13** (1943), S. 195—200.

(Hinzugefügt am 15. Oktober 1945.)

Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Ist irgendein Körper k mit einer Charakteristik $\neq 2, 3$ zu Grunde gelegt, so lassen sich bekanntlich die Gleichungen dritten und vierten Grades durch eine lineare Transformation auf die Form

$$x^3 + ax + b = 0, \tag{1}$$

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{2}$$

bringen, weiter sind sie (durch Radikale) auflösbar. Selbst die Berechnung der Wurzeln wird für (1) durch die Formel von CARDANO ermöglicht, bzw. für (2) mit Hilfe einer kubischen Resolvente auf den vorigen Fall zurückgeführt. Dabei erfordern die auftretenden Radikale in vielen Fällen eine Erweiterung des Grundkörpers, bekanntlich eventuell auch bei der Berechnung der Wurzeln, die in k liegen. So ist das klassische Problem entstanden, wie es sich mit den in k liegenden Wurzeln verhält, und zwar was ihre Zahl ist, wann und wie sie sich durch ein endliches Rechenverfahren (eine „Wurzelformel") ohne eine Erweiterung von k berechnen lassen?

Bekanntlich sind diese Fragen im historisch ersten Fall vollkommen erledigt, wenn k der Körper der reellen Zahlen ist. Für andere Grundkörper ist das Problem im allgemeinen nicht gelöst worden. Ich kann nur die bekannte Tatsache nennen, daß die in k liegenden Wurzeln (auch bei Gleichungen höheren Grades) sich mit endlich vielen Versuchen bestimmen lassen, wenn k (der absolut rationale Zahlkörper oder allgemeiner) ein absolut algebraischer Zahlkörper endlichen Grades ist.

Von nun an beschäftigen wir uns mit dem Fall, wo k ein endlicher Körper[1]) ist. Merkwürdigerweise fehlten bisher in diesem, für die Zahlentheorie sehr wichtigen und auch an sich interessanten Fall die entspre-

[1]) Man kann also (1) und (2) auch als Kongruenzen nach einem Primidealmodul in einem absolut algebraischen Zahlkörper endlichen Grades deuten.

chenden Untersuchungen, außer einer unlängst erschienenen kleinen Arbeit von SKOLEM[2]), obwohl sich jetzt die aufgeworfenen Fragen im großen Teil und teilweise sehr elegant beantworten lassen. Eine vollständige Beantwortung ist mir aber nicht gelungen[3]).

Bevor wir unsere Resultate zusammenstellen, rekapitulieren hier kurz die Auflösung der Gleichungen (1) und (2).

Die drei Wurzeln von (1) sind nach der Formel von CARDANO

$$x_1 = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha'}, \quad x_2 = \varrho\sqrt[3]{\alpha} + \varrho'\sqrt[3]{\alpha'}, \quad x_3 = \varrho'\sqrt[3]{\alpha} + \varrho\sqrt[3]{\alpha'}, \tag{3}$$

wobei 1, ϱ, ϱ' die drei Werte von $\sqrt[3]{1}$ sind[4]),

$$\alpha = -\frac{b}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D}, \quad \alpha' = -\frac{b}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D} \tag{4}$$

und

$$D = -4a^3 - 27b^2 \tag{5}$$

die Diskriminante von (1) ist; die Radikale $\sqrt{-3D}$, $\sqrt[3]{\alpha}$ sind beliebig, aber fest zu wählen, während $\sqrt[3]{\alpha'}$ nach

$$\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\alpha'} = -\frac{a}{3} \tag{6}$$

zu bestimmen ist.

---

[2]) TH. SKOLEM, Die Anzahl der Wurzeln der Kongruenz $x^3 + ax + b \equiv 0$ mod p für die verschiedenen Paare a, b, *Det Kongl. Norske Vid. Selskab Forhandl.*, **14** (1942), S. 161—164. Mir war diese Arbeit bisher nicht zugänglich. Nach dem Referat im *Zentralblatt f. Math.*, **28** (1944), S. 203 sollte der Inhalt der Arbeit folgendes sein: „Für eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 3$ hat die Titelkongruenz der Reihe nach für $p-1$, $\frac{1}{2}p(p-1)$, $\frac{1}{3}(p-1)^2$, $\frac{1}{6}(p-4)(p-1)$ Paare a, b zwei, eine, keine oder drei Wurzeln. Für $p \equiv 2 \bmod 3$ und zwar $p > 2$ sind die entsprechenden Anzahlen $p-1$, $\frac{1}{2}(p-2)(p-1)$, $\frac{1}{3}(p+1)(p-1)$, $\frac{1}{6}(p-2)(p-1)$." Das ist aber falsch schon aus dem Grunde, daß die Summe der angeführten vier Anzahlen (in beiden Fällen) p^2-p ist, wobei es doch p^2 Paare a, b gibt. Siehe die Verbesserung im Anhang am Ende meiner Arbeit [insbesondere [8])], wo ich kurz auf ähnliche Fragen über (1) und (2) eingehe. Hier erwähne ich, daß ich vorliegende Arbeit mit weniger vollkommenen Resultaten unlängst auch im *Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. Ung. Akad.* publiziert habe (in ungarischer Sprache).

[3]) Ich konnte nämlich in einigen Fällen keine Wurzelformel für die in k liegenden Wurzeln von (1) und (2) angeben, mit der man ohne Körpererweiterung auskommt, noch konnte ich den entsprechenden Unmöglichkeitsbeweis erbringen, was auch kein leichtes Problem zu sein scheint.

[4]) Wie üblich, bezeichnen wir die Elemente des in k enthaltenen Primkörpers ebenso wie die absolut rationalen Zahlen, woraus aber kein Mißverständnis entstehen wird.

Die vier Wurzeln von (2) sind

(7) $$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}),$$

(8) $$x_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}),$$

(9) $$x_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$

(10) $$x_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$

wobei y_1, y_2, y_3 die drei Wurzeln der kubischen Resolvente

(11) $$y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4C)y - B^2 = 0$$

bedeuten; die Radikale $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$, $\sqrt{y_3}$ sind mit der Einschränkung

(12) $$\sqrt{y_1}\,\sqrt{y_2}\,\sqrt{y_3} = -B$$

(sonst beliebig) zu wählen. Hieraus folgt

(13) $$y_1 = (x_1 + x_4)^2, \quad y_2 = (x_2 + x_4)^2, \quad y_3 = (x_3 + x_4)^2.$$

Man kann auch so verfahren, daß man nur ein Radikal $r = \sqrt{y_i}$ bestimmt, mit dem dann (2) in die Gleichung

(14) $$\left(x^2 + rx + \frac{r^3 + Ar - B}{r}\right)\left(x^2 - rx + \frac{r^3 + Ar + B}{r}\right) = 0$$

zerfällt, so daß man zur Berechnung der x_i nur noch die Auflösung von zwei quadratischen Gleichungen braucht. Die Diskriminanten von (2) und (11) sind gleich.

Wir bezeichnen mit q die Anzahl der Elemente von k und mit $\chi_e(x)$ einen beliebigen Charakter e-ten Grades in der multiplikativen Gruppe $q-1$-ter Ordnung, gebildet aus allen Elementen $x(\neq 0)$ von k $(e|q-1)$. Insbesondere bedeutet dann $\chi_e(x) = 1$, daß $x(\neq 0)$ eine e-te Potenz ist. Für χ_2 schreiben wir einfach χ.

Den Erweiterungskörper vom Relativgrad n über k bezeichnen wir mit k_n, der also der endliche Körper mit q^n Elementen ist. Insbesondere ist $k_1 = k$. Unter allen k_n $(n > 1)$ werden uns nur k_2, k_3, k_4 interessieren. Für k_n $(n > 1)$ werde der Charakter mit $\chi_e(x, k_n)$ bezeichnet.

Den Zerfällungskörper der Gleichungen (1), (2) und $x^3 - 1 = 0$ bezeichnen wir der Reihe nach mit Z_1, Z_2, Z. Diese sind also die kleinsten Körper über k, in denen die genannten Gleichungen ihre sämtlichen Wurzeln haben. Offenbar ist $Z_1 = k$, k_2 oder k_3 und $Z_2 = k$, k_2, k_3 oder k_4. Weiter gilt entweder

(15_1) $$Z = k, \quad \chi(-3) = 1 \qquad (3|q-1)$$

oder

$$(15_2) \qquad Z = k_2, \quad \chi(-3) = -1 \qquad (3|q+1).$$

Man kann Z auch als den kleinsten Körper über k definieren, in dem $\chi_3(x, Z)$ sinnvoll ist.

Wir nehmen an, daß die Diskriminanten unserer Gleichungen (1), (2) und die Koeffizienten a, b, B nicht verschwinden, wodurch wir nur leichte Fälle ausgeschlossen haben, insbesondere auch das Vorhandensein von mehrfachen Wurzeln.

Satz 1. *Die Gleichung* (1) *hat genau eine Wurzel in k dann und nur dann, wenn* $\chi(D) = -1$ *ist. Im anderen Fall* $\chi(D) = 1$ *liegt* α *in* Z *und dann hat* (1) *keine oder drei Wurzeln in k, je nachdem* $\chi_3(\alpha, Z) \neq 1$ *oder* $= 1$ *ist. Die Anwendung dieses Satzes macht keine Erweiterung von k nötig, das ja klar ist mit Ausnahme des Falles* $\chi(D) = 1$, $Z = k_2$ *(d. h.* $3|q+1$*). Aber in diesem Fall genügt es nur die Entwicklungsglieder der Potenz*

$$\alpha^{\frac{q^2-1}{3}} = \left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D}\right)^{\frac{q^2-1}{3}}$$

zu berechnen, die eine gerade Potenz von $\sqrt{-3D}$ *enthalten, da ihre Summe offenbar dann und nur dann* $= 1$ *ist, wenn* $\chi_3(\alpha, Z) = 1$ *gilt*[5]).

Satz 2. *Hat* (1) *genau eine Wurzel in k, so läßt sie sich statt* (3) *auch durch die Formel*

$$(16_1) \qquad -\frac{3}{a}\left(\alpha^{\frac{q+2}{3}} + \alpha'^{\frac{q+2}{3}}\right) \qquad (3|q-1)$$

bzw.

$$(16_2) \qquad \alpha^{\frac{2q-1}{3}} + \alpha'^{\frac{2q-1}{3}} \qquad (3|q+1)$$

angeben. Keine dieser Formeln macht eine Erweiterung von k nötig und man braucht nicht einmal dann die Quadratwurzel aus $-3D$ *zu berechnen, wenn diese in k liegt, da die ungeraden Potenzen des Radikals* $\sqrt{-3D}$ *wegen der Addition herausfallen.*

Hat (1) *drei Wurzeln in k und liegt erstens der Fall* $3|q-1$ *(d. h.* $Z = k$*) vor, so bestimmen sich die Wurzeln nach* (3) *ohne Erweiterung von k, da jetzt die vorkommenden Radikale in k liegen. Endlich möge* (1) *ebenfalls drei Wurzeln haben und es liege zweitens der Fall* $3|q+1$ *(d. h.* $Z = k_2$*) vor. Es bedeute dann* 3^ν *die größte, in* $q+1$ *enthaltene Dreierpotenz* ($\nu \geqq 1$)*. Gilt* ($\nu = 1$ *oder* $\nu \geqq 2$ *und über* $\chi_3(\alpha, k_2) = 1$ *hinaus sogar*)

$$(17) \qquad \chi_{3^\nu}(\alpha, k_2) = 1,$$

[5]) Obiges folgt nämlich daraus, daß jetzt $\sqrt{-3D}$ nicht in k, sondern erst in k_2 liegt, sonst wäre das falsch.

so läßt sich in (3)

$$\sqrt[3]{a}=\left(-\frac{a}{3}\right)^{-q_0}\alpha^{\frac{2q_0+1}{3}},\quad \sqrt[3]{a'}=\left(-\frac{a}{3}\right)^{-q_0}\alpha'^{\frac{2q_0+1}{3}} \tag{18}$$

einsetzen, wobei q_0 *durch*

$$q_0=\pm\frac{q+1}{3^\nu}\equiv 1 \pmod 3 \tag{19}$$

bestimmt ist, so daß also die Exponenten in (18) *ganz sind. Dadurch sind die rechten Seiten in* (3) *in gewisse Relativspuren in* k_2/k *übergegangen, und so geschieht die Berechnung der Wurzeln wieder ohne die Erweiterung von* k.[6])

Bemerkung. Nach diesem Satz ist zur Berechnung der in k liegenden Wurzeln von (1) nur dann der Erweiterungskörper k_2 heranzuziehen, mit dem man dann aber auch schon auskommt, wenn $9|q+1$ (also $\nu\geqq 2$), $\chi(D)=1$, $\chi_3(\alpha, k_2)=1$ (also drei Wurzeln in k liegen) und $\chi_{3^\nu}(\alpha, k_2)\neq 1$ ist. Es gelang mir nicht diesen restlichen Fall noch mehr einzuschränken. Es scheint hier eine ähnliche Erscheinung (wenn auch in kleinerem Ausmaße) vorzuliegen, wie der „Casus irreducibilis" in dem Fall, wo k der Körper der reellen Zahlen ist und drei reelle Wurzeln vorhanden sind.

Satz 3. *Es habe die kubische Resolvente* (11) *von* (2) *genau* m *Wurzeln in* k *und es gebe unter ihnen genau* m' *Quadrate in* k. *Je nach den Fällen* $m>m'$, $m=m'$ *hat die Gleichung* (2) *keine bzw. genau* $m+1$ *Wurzeln in* k. *Dabei sind für das Paar* m, m' *offenbar nur die Fälle möglich:* 0, 0; 1, 0; 1, 1; 3, 1; 3, 3.

Bemerkung. Eine interessante Folgerung dieses Satzes ist, daß die Gesamtzahl der Wurzeln der Gleichungen (2) und (11) immer ungerade ist. Insbesondere hat also wenigstens eine dieser Gleichungen mindestens eine Wurzel in k.[7]) — Wir können leicht sehen, was man für Körpererweiterungen braucht, wenn man die in k liegenden Wurzeln

[6]) Denn die ungeraden Potenzen von $\sqrt{-3D}$ fallen bei der Spurbildung heraus.

[7]) Und zwar gilt das offenbar auch nach Aufhebung der Einschränkung, daß B und die Diskriminante von (2) nicht verschwinden. — Drückt man $-C$ aus den Gleichungen (2), (11) aus, so läßt sich obiges auch so sagen: In k wird jedes Element durch wenigstens eine der Funktionen

$$x^4+Ax^2+Bx,\quad -\frac{x^3+2Ax^2+A^2x-B^2}{4x}$$

angenommen. Hierbei ist aber die Einschränkung $B\neq 0$ wieder unentbehrlich, wie man das gleich sieht. Es läßt sich übrigens zeigen, daß diese Funktionen „ungefähr" $\frac{5}{8}q$ bzw. $\frac{2}{3}q$ verschiedene Elemente annehmen (im Fall $B=0$ treten dafür $\frac{3}{8}q$ bzw. $\frac{1}{2}q$ ein). (Vgl. den Anhang.)

von (2) nach (14) bestimmen will. Es ist ein sehr ungünstiger Fall, wenn (2) genau eine Wurzel in k hat. Hierfür ist nämlich nach Satz 3 notwendig und hinreichend, daß (11) keine Wurzel in k hat. In diesem Fall braucht man den Erweiterungskörper k_3 zu Hilfe zu nehmen, in dem nämlich die y_i liegen, damit kommt man aber auch schon aus, da nach (7)—(10) mit den x_i auch die $\sqrt{y_i}$ in k_3 liegen. Hat weiter (2) genau zwei Wurzeln in k — das ist dann und nur dann der Fall, wenn (11) genau eine Wurzel in k hat, die dort zugleich ein Quadrat ist — so braucht man nach Satz 2 keine Körpererweiterung, denn man kann in (14) für y_i eben diese Wurzel von (11) nehmen. Hat endlich (2) vier Wurzeln in k, d. h. sind alle drei Wurzeln von (11) Quadrate in k, so gilt ähnliches bis auf den in der obigen Bemerkung erwähnten Ausnahmefall, in dem man die Erweiterung k_2 benötigt.

Beweis. Die Diskriminante von (1) drückt sich in den Wurzeln so aus:

(20) $$D = [(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]^2.$$

Liegen alle x_i in k, so folgt hieraus gleich $\chi(D) = 1$. Liegt kein x_i in k, so ist der Zerfällungskörper von (1) $Z_1 = k_3$, und das bedeutet, daß die Galoissche Gruppe von (1) von der dritten Ordnung ist. Ein erzeugendes Element dieser Gruppe permutiert also die x_i zyklisch. Dabei bleibt das Differenzenprodukt in (20) invariant, letzteres liegt somit in k. Also ist auch in diesem Fall $\chi(D) = 1$. Liegt endlich nur eines der x_i in k, so ist $Z_1 = k_2$ und die Galoissche Gruppe von (1) von der zweiten Ordnung. Das erzeugende Element vertauscht zwei der x_i miteinander, läßt also obiges Differenzenprodukt nicht invariant. Hieraus folgt $\chi(D) = -1$. Mit den bisherigen haben wir eben die erste Behauptung des Satzes 1 bewiesen.

Zum vollständigen Beweis dieses Satzes brauchen wir nur noch den Fall $\chi(D) = 1$ zu betrachten. Dann hat (1) keine oder drei Wurzeln in k, und somit genügt es zu zeigen, daß (1) dann und nur dann wenigstens eine Wurzel in k hat, wenn $\chi_3(\alpha, Z) = 1$ gilt. In der Tat, wenn diese Gleichung gilt, so liegen $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha'}$ in Z. Da auch ϱ, ϱ' in Z sind, so gilt nach (3) ähnliches auch über die x_i. Andererseits ist der Relativgrad von Z/k höchstens gleich zwei, woraus folgt, daß wenigstens eines der x_i in k ist. Wenn dies umgekehrt der Fall ist, so müssen schon alle x_i in k sein, und das ergibt nach (3), daß $\sqrt[3]{\alpha}$ in Z liegt. Das bedeutet eben $\chi_3(\alpha, Z) = 1$, womit wir Satz 1 bewiesen haben.

Aus Satz 2 brauchen wir nur die Behauptungen über (16_1), (16_2), (18) zu beweisen.

Zum Beweis von (16_1) bemerken wir zuerst, daß jetzt $\chi(D) = -1$,

$\chi(-3)=1$, also $\chi(-3D)=-1$ ist. Hieraus folgt, daß α nicht in k, sondern in k_2 ist. Wir setzen

$$(21)\qquad \xi=-\frac{3}{a}\alpha^{\frac{q+2}{3}},\quad \xi'=-\frac{3}{a}\alpha'^{\frac{q+2}{3}}.$$

Nach (6) gilt $\xi^3=(\alpha\alpha')^{-1}\alpha^{q+2}$. Andererseits ist $\alpha^q=\alpha'$, da der Automorphismus $x\to x^q$ von k_2/k die konjugierten Elemente ineinander überführt. Dies ergibt mit dem vorigen $\xi^3=\alpha$, woraus auch $\xi'^3=\alpha'$ folgt. Weiter ist nach (21) und (6)

$$\xi\xi'=\left(-\frac{3}{a}\right)^2\left(-\frac{a}{3}\right)^{q+2}=\left(-\frac{a}{3}\right)^q=-\frac{a}{3},$$

da für jedes Element x von k $x^q=x$ gilt. Wir haben also gewonnen, daß ξ, ξ' solche Kubikwurzeln aus α bzw. α' sind, daß auch (6) gilt. Das beweist nach (3) die Behauptung über (16_1).

Für die Formel (16_2) ist dagegen $\chi(D)=-1$, $\chi(-3)=-1$, also $\chi(-3D)=1$, und dies bedeutet, daß α jetzt in k liegt. Wir setzen

$$(22)\qquad \xi=\alpha^{\frac{2q-1}{3}},\quad \xi'=\alpha'^{\frac{2q-1}{3}}.$$

Jetzt ist $\alpha^q=\alpha$, woraus $\xi^3=\alpha^{2q-1}=\alpha$ folgt. Ähnlich ist $\xi'^3=\alpha'$. Weiter gilt nach (22) und (6)

$$\xi\xi'=\left(-\frac{a}{3}\right)^{2q-1}=-\frac{a}{3}.$$

Wie vorher, folgt hieraus die Richtigkeit der Behauptung über (16_2).

Die dritte Potenz der rechten Seite der ersten Gleichung in (18) ist

$$(\alpha\alpha')^{-q_0}\alpha^{2q_0+1}=\alpha(\alpha\alpha'^{-1})^{q_0}.$$

Da jetzt $\alpha^q=\alpha'$ ist, so läßt sich hierfür $\alpha\alpha^{-q_0(q-1)}$ schreiben. Der zweite Faktor ist aber wegen (17) gleich 1, da der Exponent nach (19) eben $\pm\frac{q^2-1}{3^\nu}$ ist. Das beweist zunächst die Behauptung über die erste Gleichung in (18). Da weiter nach (6) das Produkt aus den rechten Seiten in (18) gleich $-\frac{a}{3}$ ist, so haben wir Satz 2 bewiesen.

Um Satz 3 zu beweisen, zerlegen wir ihn in die folgenden drei Teilbehauptungen, wobei μ die Anzahl der in k liegenden Wurzeln von (2) bedeutet.

1) $\mu=1$ ist dann und nur dann, wenn $m=0$ ist;

2) $\mu=2$ ist dann und nur dann, wenn $m=m'=1$ ist;

3) $\mu=4$ ist dann und nur dann, wenn $m'=3$ ist.

Wir bemerken zuerst die einfache Folgerung aus (7)—(10), daß der aus k nach Adjunktion aller $\sqrt{y_i}$ entstandene Körper mit dem Zerfällungskörper Z_2 von (2) identisch ist. Insbesondere können also diese Körper nur gleichzeitig mit k zusammenfallen, was eben die Richtigkeit von 3) bedeutet. Weiter folgt aus unserer Bemerkung, daß Z_2 den Zerfällungskörper von (11) enthält und der Relativgrad eine Zweierpotenz ist. Hieraus folgt, daß die Relativgrade der Zerfällungskörper von (2) und (11) über k nur gleichzeitig durch drei teilbar sein können. Das ist eben die Richtigkeit von 1).

Um auch 2) zu beweisen, nehmen wir zuerst $\mu=2$ an. Dann ist mit geeigneter Reihenfolge

$$x_1=u, \quad x_2=v, \quad x_3=-\frac{u+v}{2}+w\sqrt{d}, \quad x_4=-\frac{u+v}{2}-w\sqrt{d},$$

wobei u, v, w, d in k sind und $u\neq v$, $w\neq 0$, $\chi(d)=-1$ gilt. Nach (13) ist dann

$$y_1=\left(\frac{u-v}{2}-w\sqrt{d}\right)^2, \quad y_2=\left(\frac{v-u}{2}-w\sqrt{d}\right)^2, \quad y_3=(u+v)^2.$$

Hieraus sieht man, daß y_1, y_2 nicht in k liegen, dagegen y_3 ein Quadrat in k, d. h. $m=m'=1$ ist, wie behauptet war. Nehmen wir umgekehrt letzteres an. Es liege z. B. y_3 in k, das dann zugleich ein Quadrat in k ist. Wir wenden (14) mit $r=\sqrt{y_3}$ an. Da jetzt r in k ist, so folgt, daß die Faktoren der linken Seite von (14) Polynome in k sind. Berücksichtigt man hierzu auch (13), so sieht man, daß die Gleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)=0, \quad (x-x_3)(x-x_4)=0 \tag{23}$$

ihre Koeffizienten in k haben. Die Diskriminanten sind

$$(x_1-x_2)^2, \quad (x_3-x_4)^2,$$

die natürlich in k liegen. Andererseits sind y_1, y_2 wegen der Annahme die Wurzeln einer irreduziblen Gleichung in k, woraus folgt, daß $(y_1-y_2)^2$ in k ist mit $\chi((y_1-y_2)^2)=-1$. Man berechnet aber nach (13)

$$y_1-y_2=(x_1+x_4)^2-(x_2+x_4)^2=(x_1-x_2)(-x_3+x_4),$$

woraus

$$(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2$$

folgt. Es ergibt sich hieraus, daß genau nur die eine der Gleichungen (23) ein Quadrat in k zur Diskriminante hat. Dies bedeutet $\mu=2$, womit wir Satz 3 bewiesen haben.

Anhang. Von hier an sollen die Koeffizienten der Gleichungen (1) und (2) keiner Einschränkung mehr unterworfen sein. Wir lassen in diesen Gleichungen die konstanten Glieder b, C alle Elemente von k durchlaufen, und fragen, wie viele Gleichungen (1) bzw. (2) auf diesem Wege (bei festgehaltenem a, A, B) entstehen, die eine vorgegebene Anzahl Lösungen haben. Diese Frage läßt sich offenbar auch so formuliren: Wie viele Elemente nehmen die Funktionen

$$x^3+ax, \quad x^4+Ax^2+Bx$$

genau i-mal an, wobei $i=0, 1, 2, 3$ bzw. $0, 1, 2, 3, 4$ sein kann. Mit solchen Fragen (auch allgemeiner für nicht notwendig ganze rationale Funktionen dritten und vierten Grades) werde ich mich in einer anderen Arbeit ausführlich beschäftigen, wobei die vorliegende Arbeit zur Anwendung kommen wird; trotzdem will ich hier die obigen Fragen mit Andeutung des Beweises beantworten.

Satz 4. *Bei festem a bedeute n_i $(i=0, 1, 2, 3)$ die Anzahl derjenigen b, für die die Gleichung (1) genau i verschiedene Wurzeln hat.*

Im Fall $a \neq 0$ ist:

$$n_0=\frac{1}{3}q-\frac{1}{3}\chi(-3), \tag{24}$$

$$n_1=\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi(-3)-\frac{1}{2}\chi(-3a), \tag{25}$$

$$n_2=1+\chi(-3a), \tag{26}$$

$$n_3=\frac{1}{6}q-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\chi(-3)-\frac{1}{2}\chi(-3a). \tag{27}$$

Im Fall $a=0$ ist:

$$n_0=\frac{q-1}{3}(1+\chi(-3)), \quad n_1=1+\frac{q-1}{2}(1-\chi(-3)), \quad n_2=0, \quad n_3=\frac{q-1}{6}(1+\chi(-3)).[8] \tag{28}$$

Satz 5. *Bei festem A, B bedeute n_i $(i=0, 1, 2, 3, 4)$ die Anzahl derjenigen C, für die die Gleichung (2) genau i verschiedene Wurzeln hat.*

Im Fall $B \neq 0$ ist:

$$n_0=\frac{1}{8}q-\frac{1}{8}S_1+\frac{1}{8}S_2-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\chi(-1)-\frac{1}{2}\sigma_1, \tag{29}$$

$$n_1=\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}S_1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\varrho+\sigma_1, \tag{30}$$

$$n_2=\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}S_1-\frac{1}{4}S_2+\frac{1}{4}\chi(-1)+\varrho-\frac{1}{2}\sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_2, \tag{31}$$

$$n_3=-\varrho+\sigma_2, \tag{32}$$

$$n_4=\frac{1}{24}q+\frac{1}{24}S_1+\frac{1}{8}S_2-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\chi(-1)+\frac{1}{3}\varrho-\frac{1}{2}\sigma_2, \tag{33}$$

[8]) Addiert man die n_i für alle a, so ergibt sich, daß es insgesamt $\frac{1}{3}(q^2-1)$, $\frac{1}{2}(q^2-q)+1$, $q-1$, $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)$ Gleichungen (1) gibt, die keine, eine, zwei bzw. drei Wurzeln haben. Damit wurden die Angaben in [2]) verbessert und verallgemeinert.

wobei

$$S_1 = \chi(2) \sum_x{}' \chi(x^3 + 2(Ax - B^2)^2), \tag{34}$$

$$S_2 = \chi(-1) \sum_x{}' \chi(x^3 + 2Ax^2 + 4B^2),\text{[9]} \tag{35}$$

weiter $\varrho = 1$, *wenn* $8A^3 + 27B^2 = 0$, *sonst* $\varrho = 0$ *ist, endlich* σ_1, σ_2 *die Anzahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung* $B^2x^3 + 2Ax + 2 = 0$ *bedeuten, für die* $\chi(x) = -1$ *bzw.* 1 *ist.*

Im Fall $A \neq 0$, $B = 0$ *ist:*

$$n_0 = \frac{5}{8}q - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\chi(-1) + \frac{1}{4}\chi(-A) - \frac{1}{4}\chi(-2A), \tag{36}$$

$$n_1 = \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{2}\chi(-A) \qquad , \tag{37}$$

$$n_2 = \frac{1}{4}q - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\chi(-1) \qquad + \frac{1}{2}\chi(-2A), \tag{38}$$

$$n_3 = \frac{1}{2} \qquad + \frac{1}{2}\chi(-A) \qquad , \tag{39}$$

$$n_4 = \frac{1}{8}q - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\chi(-1) - \frac{1}{4}\chi(-A) - \frac{1}{4}\chi(-2A). \tag{40}$$

Im Fall $A = B = 0$ *ist:*

$$\begin{gathered} n_0 = \frac{q-1}{8}(5 + \chi(-1)),\; n_1 = 1,\; n_2 = \frac{q-1}{4}(1 - \chi(-1)),\; n_3 = 0, \\ n_4 = \frac{q-1}{8}(1 + \chi(-1)). \end{gathered} \tag{41}$$

Es ist nämlich in jedem Fall $\sum_i n_i = q$, $\sum_i i n_i = q$, wie das auch offenbar sein muß. Deshalb genügt es für die Gleichungen (1) und (2) nur n_1, n_2 bzw. n_1, n_2, n_3 zu bestimmen. Für die Gleichung (1) ist im Fall $a \neq 0$ nach Satz 1 n_1 und n_2 die Anzahl der b, für die $\chi(D) = -1$ bzw. $D = 0$ ist, und so folgen (25), (26) leicht. Fall $a = 0$ leuchtet unmittelbar ein. Für die Gleichung (2) bestimmt sich n_3 ebenfalls leicht. Um auch n_1, n_2 zu bestimmen, zieht man Satz 3 heran, auf die ziemlich komplizierten Rechnungen gehe ich aber, wie gesagt, erst an einer anderen Stelle ein.

(Eingegangen am 22. September 1944.)

[9] Nach H. Hasse sind die Summen in (34), (35) absolut $\leqq 2\sqrt{q}$.

On rational polynomials.

By P. TURÁN in Budapest.

1. E. LAGUERRE[1]) proved the following well-known theorem:

Let $x_1 = 1$ and $x_2 = -1$ be two consecutive roots of the polynomial $f(x)$ of degree n, with real roots only. Then $f'(x) \neq 0$ in the intervals $\left(1-\frac{2}{n}, 1\right)$ and $\left(-1, -1+\frac{2}{n}\right)$.

This theorem is the best possible in the sense that for the polynomials $f_1(x) = (x+1)(x-1)^{n-1}$ and $f_2(x) = (x-1)(x+1)^{n-1}$, the conditions of the theorem are fulfilled and $f_1'(x) = 0$ for $x = -1 + \frac{2}{n}$ and $f_2'(x) = 0$ for $x = 1 - \frac{2}{n}$. Of course, we may suppose the coefficients of $f(x)$ to be real.

The theorem of LAGUERRE was improved by P. MONTEL[2]), who supposed only that the coefficients are real and that $f(x)$ does not vanish in the strip $-1 < \Re z < 1$.[3]) A further generalisation was obtained by J. VON SZ. NAGY[4]), who has shown under the same preliminary hypothesis of real coefficients, that Laguerre's statement holds good even if the roots are supposed to lie outside the circle $|z| < 1$.

The essential of these theorems may be characterized shortly as that under certain hypothesis the places of local maxima cannot lie „too near" to the roots. Of course, the same is true for the values ξ of x, for which

$$\max_{-1 \leq x \leq +1} |f(x)| = |f(\xi)|,$$

[1]) E. CESÀRO, Solution de la Question 1338, *Nouvelles Annales de Math.*, (3) **4** (1885), pp. 328—330.

[2]) P. MONTEL, Sur les zéros des derivées des fonctions analytiques, *Bull. de la Soc. Math. France,* **58** (1930), pp. 105—126.

[3]) $\Re z$ denotes the real part of z.

[4]) J. VON SZ. NAGY, Über die reellen Nullstellen des Derivierten eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, *these Acta,* **8** (1936), pp. 42—53.

shortly, for the places ξ of absolute maximum. As Mr. A. Rényi remarked, this fact is true without any hypothesis, even the reality of the coefficients is not necessary and by using Markoff's well known theorem he obtained the first estimation

$$-1+\frac{1}{n^2}<\xi<1-\frac{1}{n^2}.$$

This interval is not the best possible. Our theorems I and II give the narrowest interval for the most important case of real coefficients.

Theorem I. *Let n be even and $f(x)$ a polynomial of degree n with real coefficients such that $f(1)=f(-1)=0$ and $f(x)$ does not vanish for $-1<x<1$. If the absolute maximum within the interval $-1\leqq x\leqq 1$ is attained for $x=\xi$, then the inequality*

$$-\cos\frac{\pi}{n}\leqq\xi\leqq\cos\frac{\pi}{n}\sim 1-\frac{\pi^2}{2n^2} \tag{1}$$

holds true. The bounds $\pm\cos\frac{\pi}{n}$ are the best possible; for $n=2$ we have obviously always $\xi=0=\pm\cos\frac{\pi}{2}$, while for $n\geqq 4$ $\xi\neq\cos\frac{\pi}{n}$.

Theorem II. *Let n be odd and let $f(x)$ satisfy the conditions of theorem I. Then, with the same notation, the inequality*

$$-\frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}<\xi<\frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\sim 1-\frac{\pi^2}{2n^2} \tag{2}$$

holds good. The bounds $\pm\frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}$ are the best possible.[5])

[5]) It is interesting to note that — contrary to the usual in the theory of polynomals — for $n\geqq 3$ equality can *not* be attained. It is easy to generalize theorems I and II, if we introduce the notion of the Chebishef system, (see S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales* etc., Collection Borel, 1926). One calls a system $\varphi_0(x),\ldots,\varphi_n(x)$ of bounded and continuous functions a Chebishef system, if any $F_n(x)=a_0\varphi_0(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)$ with $|a_0|^2+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2\neq 0$ has at most n roots. Here every root is counted as simple, except those in which $F_n(x)$ does not change its sign; these we consider as double ones. The problem to be treated is to consider the minimal distance of those values $x=\xi_\nu$ from two consecutive roots of $F_n(x)$, a and b, in which $F_n(x)$ takes its absolute maximum for $a\leqq x\leqq b$ and $a<\xi_\nu<b$. For n even we obtain that these values ξ_ν cannot approximate a or b better then the least and greatest places of maxima of that $F_n(x)=a_0\varphi_0(x)+\ldots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\varphi_n(x)$, which has the minimal deviation from 0. For n odd the same is furnished by a suitably "dilated" minimizing polynomial. Thus these theorems give a new extremal property of the polynomials with minimal deviation from 0.

2. There is another question of the same kind. Let us fix the point ξ where the polynomial $g(x)$ of degree n has to take its absolute maximum and let us ask for the minimal distance of the next root. This question was investigated by D. LÁZÁR, who however did not publish his results. The corresponding question for trigonometric polynomials was solved long ago by M. RIESZ[6]; he proved that the distance between ξ and any root equals at most $\frac{\pi}{2n}$, equality occuring only for the polynomials $c_1 \cos(n\vartheta + c_2)$. A weaker inequality, with 1 instead of $\frac{\pi}{2}$, follows easily from the well known theorem of S. BERNSTEIN. The knowledge of the best possible factor $\frac{\pi}{2}$, however, has many important applications in the theory of interpolation[7]) and in the theory of uniform distribution[8]).

The theorem of M. RIESZ suggests naturally the following problem. Suppose the polynomial $G(z)$ of degree n takes in $|z| \leqq 1$ the maximum of absolute value at $z = 1$; how near to this point can lie roots (I) on $|z| = 1$, (II) in the circle $|z| \leqq 1$? It follows easily from a theorem of M. RIESZ, that $f(z) \neq 0$ in the domain $|1 - z| < \frac{1}{n}$. The question (I) can be answered by

Theorem III. *The polynomial $G(z)$ definied above does not vanish on that arc of the unit-circle for which $|\operatorname{arc} z| < \frac{\pi}{n}$, even if we allow complex coefficients.* $G\left(e^{\pm i \frac{\pi}{n}}\right) = 0$ *only if* $G(z) = c(1 + z^n)$.

As to question (II), we note that to every point z_0 of the radii $\operatorname{arc} z = \pm \frac{\pi}{n}$, $0 \leqq |z| \leqq 1$, there exists an appropriate polynomial of our class vanishing at z_0. In fact, let be $0 \leqq \varrho \leqq 1$ and

$$G_1(z) = \frac{z - \varrho e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - \varrho e^{-i\frac{\pi}{n}} z} \left[1 - \left(\varrho e^{-i\frac{\pi}{n}}\right)^n z^n\right] = \frac{z - \varrho e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - \varrho e^{-i\frac{\pi}{n}} z} (1 + \varrho^n z^n).$$

Then for $|z| = 1$ we have $|G_1(z)| = |1 + \varrho^n z^n| \leqq |G_1(1)|$ and $G_1\left(\varrho e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = 0$. The same argument holds for $\varrho e^{-i\frac{\pi}{n}}$.

---

6) M. RIESZ, Eine trigonometrische Interpolationsformel etc., *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **23** (1915), pp. 354—368.

7) P. ERDŐS and P. TURÁN, On Interpolation, III, *Annals of Math.,* **41** (1940), pp. 510—553.

8) P. ERDŐS and P. TURÁN, On the uniformly dense distribution of certain sequences of points, *Annals of Math.,* **41** (1940), pp. 163—173.

Now we proceed to the proof of our theorems; our method is similar to that used by M. RIESZ.

3. Proof of theorem I. Suppose at first $n \geqq 4$. We consider the particular polynomial

$$H(x) = \frac{1}{2}(1 - T_n(x)),$$

where $T_n(x)$ denotes, as usual, the n^{th} Chebishef polynomial, i. e. $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$. For $-1 \leqq x \leqq +1$ we have $0 \leqq H(x) \leqq 1$ and

$$(3) \qquad H\left(\cos\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) = 1,\ H\left(\cos\frac{2\nu}{n}\pi\right) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2};$$

n being even we have $H(1) = H(-1) = 0$. As to the polynomial $f(x)$, we have $f(1) = f(-1) = 0$ and we may suppose that for $-1 < x < +1$

$$(4) \qquad 0 < f(x) \leqq 1, \quad \max_{-1 \leqq x \leqq +1} f(x) = 1.$$

This, together with (3), gives that the polynomial $f(x) - H(x)$ of degree n has at least one root in every interval

$$\cos\frac{\nu\pi}{n} \leqq x \leqq \cos\frac{(\nu-1)\pi}{n}, \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n.$$

It remains only to consider the interval $\cos\frac{\pi}{n} \leqq x \leqq 1$. If $f(x)$ would attain its absolute maximum for the interval $[-1, +1]$ at a point ξ for which $\cos\frac{\pi}{n} < \xi < 1$, then the relations

$$f\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \leqq 1 = H\left(\cos\frac{\pi}{n}\right),\ f(\xi) = 1 > H(\xi),\ f(1) = H(1)\,(=0)$$

would hold and the interval $\cos\frac{\pi}{n} < x \leqq 1$ would contain at least two roots of $f(x) - H(x)$. But then this polynomial of order n would have at least $n+1$ roots and so $f(x)$ would be identical to $H(x)$; this is impossible, for $H(x)$ does not belong to our class of polynomials (the roots $x = \pm 1$ being not *consecutive* ones). This contradiction evidently holds even if $\xi = \cos\frac{\pi}{n}$. So the inequality $\xi < \cos\frac{\pi}{n}$ is proved for $n \geqq 4$; for this case the proof of the inequality $\xi > -\cos\frac{\pi}{n}$ runs on similar lines. For $n \geqq 4$ it remains only to show that the constant $\cos\frac{\pi}{n}$ is the best possible. From (3) and

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots, \qquad H(x) = -2^{n-2}x^n + \ldots$$

follows, that

$$H(x) = 2^{n-2}(1-x^2) \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(x - \cos\frac{2\nu\pi}{n}\right)^2.$$

We consider at first the polynomial

$$H_1(x, \varepsilon) = 2^{n-2}(1-x^2)\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} + i\varepsilon\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\varepsilon\right) \prod_{\nu=2}^{\frac{n}{2}-1} \left(x - \cos\frac{2\nu\pi}{n}\right)^2 =$$

$$= 2^{n-2}(1-x^2)\left|x - \cos\frac{2\pi}{n} + i\varepsilon\right|^2 \prod_{\nu=2}^{\frac{n}{2}-1} \left(x - \cos\frac{2\nu\pi}{n}\right)^2.$$

(the last factor being 1 for $n=4$). Since for $\varepsilon \to 0$ $H_1(x, \varepsilon)$ converges to $H(x)$ uniformly in $[-1, +1]$, the places of *relative* maximum of $H_1(x, \varepsilon)$ converge to those of $H(x)$, i. e. to the places $x = \cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi$. A simple geometrical consideration shows that, choosing ε sufficiently small, the place of *absolute* maximum is in the neighbourhood of $\cos\frac{\pi}{n}$. Let ε be fixed and consider the polynomial

$$H_2(x, \varepsilon, \eta) = 2^{n-2}(1-x^2)\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} + i\varepsilon\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\varepsilon\right) \prod_{\nu=2}^{\frac{n}{2}-1} \left(x - \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\eta\right)\left(x - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\eta\right) =$$

$$= 2^{n-2}(1-x^2)\left|\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} + i\varepsilon\right) \prod_{\nu=2}^{\frac{n}{2}-1} \left(x - \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\eta\right)\right|^2.$$

Choosing η sufficiently small, $H_2(x, \varepsilon, \eta)$ takes its absolute maximum in the neighbourhood of $\cos\frac{\pi}{n}$ and does not vanish in $-1 < x < +1$. Finally the polynomial

$$H_3(x, \varepsilon, \eta) = \frac{H_2(x, \varepsilon, \eta)}{\max\limits_{-1 \leq x \leq +1} |H_2(x, \varepsilon, \eta)|}$$

belongs to our class and takes its absolute maximum in $[-1, +1]$ arbitrary near to $\cos\frac{\pi}{n}$. Thus the case $n \geqq 4$ is settled; for $n=2$ our class reduces obviously to the polynomials $c(1-x^2)$ (c real), which attain their absolute maximum at $x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, qu. e. d.

4. Proof of theorem II. This runs on the same lines as that of theorem I, but we need another auxiliary polynomial instead of $H(x)$. Let be $n \geqq 5$, $T_n(x)$ the same as before and

$$H_4(x) = \frac{1}{2}\left[1 - T_n\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2} + \frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{2}x\right)\right]. \tag{5}$$

This polynomial has the following properties. For $-1 \leqq x \leqq +1$

$$0 \leqq H_4(x) \leqq 1, \tag{6}$$

$H_4(x)$ vanishes if and only if

$$x = \frac{2\cos\frac{2\nu\pi}{n} - 1 + \cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}} = \eta_\nu, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}. \tag{7}$$

The equation $H_4(x) = 1$ holds if

$$x = \frac{2\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{n} - 1 + \cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}} = \varrho_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}. \tag{8}$$

We have obviously

$$1 = \eta_0 > \varrho_1 > \eta_1 > \ldots > \varrho_{\frac{n-1}{2}} > \eta_{\frac{n-1}{2}} = -1,$$

further

$$H_4(1) = H_4(-1) = 0, \qquad H_4'(-1) = 0.$$

As to the polynomial $f(x)$ to be considered, we may suppose, as before, relations (4) and $f(1) = f(-1) = 0$. According to (6), (8) and (7), the polynomial $f(x) - H_4(x)$ of degree n has in each interval

$$\eta_\nu \leqq x \leqq \varrho_\nu, \qquad \varrho_{\mu+1} \leqq x \leqq \eta_\mu,$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2}; \quad \mu = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2}$$

at least one, and so together at least $n-3$ roots. Again, let us consider the interval $-1 = \eta_{\frac{n-1}{2}} \leqq x \leqq \varrho_{\frac{n-1}{2}}$. The polynomial $f(x) - H_4(x)$ has here at last two new roots, since $H_4(\varrho_{\frac{n-1}{2}}) = 1$, $H_4'(-1) = H_4'(-1) = 0$. Let $f(x)$ attain its absolute maximum, within the interval $[-1, +1]$, at $x = \xi$ and suppose, contrary to our statement, that $\xi > \dfrac{3\cos\frac{\pi}{n} - 1}{1+\cos\frac{\pi}{n}} = \varrho_1$.

By the argument used in proving theorem I, the polynomial $f(x) - H_4(x)$ of degree n would have at least two roots in $[\varrho_1, 1]$ and so this polynomial would admit $(n+1)$ roots at least, whence $f(x) = H_4(x)$; this is impossible, for $H_4(x)$ does not belong to our class. So we have got

$$\xi < \varrho_1 = \frac{3\cos\frac{\pi}{n} - 1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}.$$

By the same argument $\xi > -\dfrac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}$ for $n \geqq 5$, and we can see that the interval $\left[-\dfrac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}, \dfrac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right]$ is the narrowest one. For the case $n=3$ the proof is quite obvious.

5. **Proof of theorem III.** Let us consider the expression $|G(z)|^2$ with $z=e^{i\vartheta}$; this is a non-negative trigonometric polynomial of order n, which, according to our hypothesis, attains its absolute maximum at $\vartheta=0$, i. e. $z=1$. Without loss of generality, we may suppose $|G(1)|=1$ and $n\geqq 2$. We consider the auxiliary polynomial $K(z)=\dfrac{1+z^n}{2}$. Again

$$(9) \qquad |K(z)|^2_{z=e^{i\vartheta}} = \frac{1}{4}|1+z^n|^2 = \cos^2\frac{n\vartheta}{2} = \frac{1+\cos n\vartheta}{2} \equiv H_5(\vartheta),$$

and

$$H_5\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right)=1, \quad H_5\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right)=0 \qquad (\nu=0,1,\ldots,n-1).$$

Since the curve $y=|G(e^{i\vartheta})|^2$ runs in the strip $0\leqq y\leqq 1$, the trigonometric polynomial $|G(e^{i\vartheta})|^2-H_5(\vartheta)$ of order n has at least one root in every interval $\dfrac{l\pi}{n}\leqq\vartheta\leqq\dfrac{(l+1)\pi}{n}$ $(l=1,2,\ldots,2n-2)$. Since $|G(e^{i\vartheta})|^2$ and $H_5(\vartheta)$ attain their absolute maxima at $\vartheta=0$, this point is at least a double root of $|G(e^{i\vartheta})|^2-H_5(\vartheta)$. If we suppose $G(e^{i\vartheta_0})=0$ with $0<\vartheta_0<\dfrac{\pi}{n}$, than according to the inequalities

$$|G(e^{i\vartheta_0})|^2-H_5(\vartheta_0)\leqq 0, \quad \left|G\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)\right|^2-H_5\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)>0,$$

$|G(e^{i\vartheta})|^2-H_5(\vartheta)$ would have one more root between ϑ_0 and $\dfrac{\pi}{n}$. Collecting these results we obtain $|G(e^{i\vartheta})|^2\equiv H_5(\vartheta)$. It is well known[9]), that given a non-negative trigonometric polynomial $H_6(\vartheta)$, there exists at

[9]) Theorem of Fejér—Riesz; see L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **146** (1915), pp. 53–82.

least one, but generally more than one rational polynomial $G_1(z)$ of degree n such that $|G_1(e^{i\vartheta})|^2 \equiv H_6(\vartheta)$. But in the case $H_6(\vartheta) = \frac{1+\cos n\vartheta}{2}$ (or generally, when the roots of $H_6(\vartheta)$ are real), there is only one $G_1(z)$ of this kind. Indeed, taking (9) into account, it follows, that

$$\left|\frac{G_1(z)}{1+z^n}\right|^2_{z=e^{i\vartheta}} \equiv \frac{1}{4} \tag{10}$$

i. e. $G_1\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = G_1\left(e^{\frac{3i\pi}{n}}\right) = \ldots = G_1\left(e^{(2n-1)\frac{i\pi}{n}}\right) = 0$. But this means that $G_1(z) \equiv c(1+z^n)$ and compared with (10), this gives $G_1(z) = \frac{1+z^n}{2}$, qu. e. d.

(Received January 19, 1943.)

A remark on the length of the circle and on the exponential function.

By E. EGERVÁRY in Budapest.

The length of a curve is generally defined as the limit of the length of an inscribed polygon whose sides tend to zero. To justify this definition, it must be shown, that this limit is independent of the mode of subdivision of the curve.

In elementary geometry, as a rule, the length of the circle is defined as the limit of a particular sequence of regular inscribed polygons, and one proves afterwards, indirectly[1]) (if at all), that any other sequence tends to the same limit.

In the present note I intend to give a direct and elementary proof of the

Theorem I. *The length of the inscribed polygon in a circle tends to a limit, when the number of sides increases indefinitely in such a way that all the sides tend to zero.*

As any two such sequences of inscribed polygons may be united to a third sequence of the same kind, Theorem I proves at once that the limit does not depend on the choice of the sequence of polygons.

Theorem I is based upon the following

Lemma I[2]). *If A and B are two inscribed polygons which contain the center of the circle in their interior and are such that the largest side of B is smaller than the smallest side of A, then A is shorter than B.*

---

[1]) To prove the existence of the length of a circle, most of the writers see themselves compelled to consider simultaneously inscribed *and* circumscribed polygons. See e. g. G. H. HARDY, *Pure Mathematics* (1908), p. 276; J. HADAMARD, *Géométrie élémentaire* (1925), pp. 170–172; H. WEBER—J. WELLSTEIN, *Encykl. d. Elementarmath.* (1907), II, pp. 269–273; KÜRSCHÁK J., *Analizis* (1923), pp. 122—128.

[2]) Lemma I (proposed by the author as a problem in the *Math. és Fiz. Lapok*, **50** (1943), pp. 377—380) is equivalent to a theorem of M. DEHN, *Norske Vid. Selsk. Forh.*, **13** (1941), pp. 103–106.

The well known theorem, that the length of a regular polygon increases steadily wi'h the number of sides, is an obvious corollary of Lemma I.

The method may be extended without any difficulty to the definition of the length of a circular arc.

The number e is generally defined as $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Here I will suggest a more general definition, which relates to the former one in the same fashion as the definition of the length of the circle by means of general sequences to that by means of regular polygons. Indeed, the number e may be defined in the following way:

Theorem II. *If $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are positive numbers, whose sum is equal to* 1, *then* $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1+\alpha_\nu)$ *tends to a limit, when n increases in such a way that all of the numbers α_ν tend to zero.*

As any two such sequences of n-tuples $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ may be united to a third sequence of the same kind, Theorem II proves at once that the limit does not depend on the choice of the sequence. By taking $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\frac{1}{n}$, it is obvious that *the limit in question is equal to e,* which is now defined in the same general way, as π by means of general sequences of polygons.

Theorem II is based upon the following

Lemma II. *If $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ and $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ are two sets of positive numbers such that* $\sum\limits_1^m \alpha_\mu=\sum\limits_1^n \beta_\nu$ *and* $\max\beta_\nu<\min\alpha_\mu$, *then*

$$\prod_1^n(1+\beta_\nu)>\prod_1^m(1+\alpha_\mu).$$

The well known theorem, that $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ increases steadily with n is an obvious consequence of Lemma II.

Our definition of e may be extended to e^x (by replacing the assumption $\Sigma\alpha_\nu=1$ by $\Sigma\alpha_\nu=x$) and has the advantage, that the fundamental identity $e^{x+y}=e^x e^y$ is an obvious consequence of it.

Lemma I may be proved by means of the following inequality:[3])

If the points X and Y of the

Lemma II may be proved by means of the following inequality:

If the positive numbers x_1, x_2'

[3]) See also J. Kürschák, Über dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke, *Math. Annalen,* **30** (1887), pp. 578–581.

circular arc $\widehat{AB}$ are such that

$$\left.\begin{aligned}\widehat{AX} > \widehat{AY} > \widehat{XB},\\ \widehat{AX} > \widehat{YB} > \widehat{XB},\end{aligned}\right\} \qquad (1_{\mathrm{I}})$$

then

$$\overline{AY} + \overline{YB} > \overline{AX} + \overline{XB}. \quad (2_{\mathrm{I}})$$

Indeed, if $\overline{AX}$ and $\overline{BY}$ meet in Z, then, owing to the similarity of $\triangle AYZ$ and $\triangle BXZ$,

$$\overline{BX} = q\overline{AY}$$
$$\overline{XZ} = q\overline{YZ}$$
$$\overline{BZ} = q\overline{AZ}$$

where $q < 1$. Consequently

$$\overline{AY} + \overline{YB} - (\overline{AX} + \overline{XB}) =$$
$$= (\overline{AY} + \overline{YZ} - \overline{AZ})(1-q) > 0,$$

qu. e. d.

Let us now denote the cyclic succession of the vertices A_μ, B_ν of the inscribed polygons[4]) by

$$A_0 = B_0 \prec B_1 \prec \ldots \prec$$
$$\prec B_{\nu_1} \prec A_1 \leqq B_{\nu_1+1} \prec \ldots \prec A_0 = B_0.$$

Then by repeated application of the inequality (2_{I}) and of the triangular inequality (and using the abbrevation $\overline{XY} + \overline{YZ} + \ldots + \overline{WT} = \overline{XY\ldots T}$)

$$\overline{A_0B_1\ldots B_{\nu_1}B_{\nu_1+1}\ldots B_0} \geqq$$
$$\geqq \overline{A_0B_{\nu_1}B_{\nu_1+1}\ldots B_0} >$$
$$> \overline{A_0A_1B_{\nu_1+1}\ldots B_0} \geqq$$
$$\geqq \overline{A_0A_1B_{\nu_2}\ldots B_0} >$$
$$> \ldots > \overline{A_0A_1A_2\ldots A_0}.$$

We have thus proved the Lemma I.

Let us now consider a sequence of inscribed polygons P_n of length l_n and such that the largest side of P_n tends to zero as $n \to \infty$.

y_1, y_2 are such that

$$\left.\begin{aligned}x_1 + x_2 = y_1 + y_2,\\ x_1 > y_1 > x_2,\\ x_1 > y_2 > x_2,\end{aligned}\right\} \qquad (1_{\mathrm{II}})$$

then

$$y_1 y_2 > x_1 x_2. \qquad (2_{\mathrm{II}})$$

Indeed, by (1_{II}) we have

$$y_1y_2 - x_1x_2 =$$
$$= y_1y_2 - (y_1 + y_2 - x_2)\,x_2 =$$
$$= (y_1 - x_2)(y_2 - x_2) > 0,$$

qu. e. d.

Let us now denote the succession of the sums

$$A_\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu,$$
$$B_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$$

in ascending order by

$$0 < B_1 < B_2 < \ldots < B_{\nu_1} < A_1 \leqq$$
$$\leqq B_{\nu_1+1} < \ldots < A_m = B_n.$$

Then by repeated application of the obvious inequality

$$(1 + x_1)(1 + x_2) > 1 + x_1 + x_2$$
$$(x_1, x_2 > 0)$$

and of (2_{II}) we get

$$(1+\beta_1)\ldots(1+\beta_{\nu_1})(1+\beta_{\nu_1+1})\ldots(1+\beta_n) \geqq$$
$$\geqq (1 + B_{\nu_1})(1 + \beta_{\nu_1+1})\ldots(1+\beta_n) >$$
$$> (1+\alpha_1)(1 + B_{\nu_1+1} - \alpha_1)\ldots(1+\beta_n) \geqq$$
$$> \ldots > (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n).$$

We have thus proved the Lemma II.

Let us now consider a sequence of products $l_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + \alpha_{n\nu})$ such that

$$\alpha_{n\nu} > 0, \ \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{n\nu} = 1$$

and the largest factor of l_n tends to 1, as $n \to \infty$.

---

[4]) We suppose, without loss of generality, that $A_0 = B_0$.

If the sequence of the numbers l_n (which is in both cases bounded[5])) would be divergent, then one could select two convergent partial sequences

$$l_{\mu_1}, l_{\mu_2}, \ldots, l_{\mu_k},$$
$$l_{\nu_1}, l_{\nu_2}, \ldots, l_{\nu_k},$$

with distinct limits. But h being given *arbitrarily*, we can find a number k such that

the largest side of P_{ν_k} is smaller than the smallest one of P_{μ_h}, and, owing to the Lemma I,	the largest factor of l_{ν_k} is smaller than the smallest one of l_{μ_h}, and, owing to the Lemma II,

$$l_{\nu_k} > l_{\mu_h}.$$

Consequently

$$\lim_{k\to\infty} l_{\nu_k} \geqq \lim_{h\to\infty} l_{\mu_h}.$$

Interchangig the partial sequences, we get

$$\lim_{h\to\infty} l_{\mu_h} \geqq \lim_{k\to\infty} l_{\nu_k},$$

hence $\lim l_{\nu_k} = \lim l_{\mu_h}$ and the sequence l_n is convergent.

I regard the proofs given here as being really elementary. From a more advanced point of view it may be remarked, that Lemma I and II are immediate consequences of the following theorem of G. H. Hardy[6]):

If the set $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ is majorized by $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, then for any continous convex function $\Phi(x)$

$$\Phi(\beta_1) + \Phi(\beta_2) + \ldots + \Phi(\beta_n) > \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2) + \ldots + \Phi(\alpha_n).$$

Under the conditions

$$\alpha_\mu > \beta_\nu > 0 \text{ for } \mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n > m,$$
$$\alpha_\mu = 0 \qquad \text{for } \mu = m+1,\ m+2, \ldots, n,$$
$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu$$

the set (β) is majorized by (α) and if we assume moreover that $\Phi(0) = 0$, then

$$(H) \qquad \Phi(\beta_1) + \Phi(\beta_2) + \ldots + \Phi(\beta_n) > \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2) + \ldots + \Phi(\alpha_m).$$

---

5) The length of any polygon, which contains the circle, is an upper bound of the length of all inscribed polygons and any expression of the form $\Pi(1-\beta_\nu)^{-1}$ is an upper bound of the products $\Pi(1+\alpha_\nu)$.

6) G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities* (1934), pp. 89–91.

Lemma I and II are special cases of this inequality for $\Phi(x) = \sin\frac{x}{2}$ $(\alpha_\mu = \widehat{A_\mu A_{\mu+1}}, \beta_\nu = \widehat{B_\nu B_{\nu+1}})$ resp. for $\Phi(x) = \log(1+x)$.

In virtue of (H), $\sum_{\nu=1}^{n} \Phi(\alpha_\nu)$ tends to a limit, if $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = C$ and $\max \alpha_\nu \to 0$, the limit being independent of the mode of subdivision of C. Hence the value of the limit is

$$\lim_{n\to\infty} n\Phi\left(\frac{C}{n}\right) = C\,\Phi'(+0).$$

The assumption $\Phi(x) = e^x - 1$ leads to another instructive application of (H). In this case

$$\sum_{\nu=1}^{n} e^{\alpha_\nu} - n \to C$$

if $\max \alpha_\nu \to 0$ and the α_ν are restricted by $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = C$ or, what is the same thing, by $\prod_{\nu=1}^{n} e^{\alpha_\nu} = e^C$. Denoting e^{α_ν} by $\frac{q_\nu}{q_{\nu-1}}$ and e^C by Γ, we have

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1}} \to \log \Gamma \tag{3}$$

if $\frac{q_n}{q_0} = \Gamma$ and $\frac{q_\nu}{q_{\nu-1}} \to 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

To illustrate this result, take $q_\nu = n + \nu$ resp. $= \sqrt[n]{2^\nu}$, then $\Gamma = 2$ and (3) asserts that

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = \log 2.$$

(Received June 15, 1944.)

On a Tauberian theorem of O. Szász.

By ALFRED RÉNYI in Budapest.

O. SZÁSZ proved[1]) the following generalisation of Littlewood's Tauberian theorem on power series[2]):

Let $\sum_0^\infty a_k$ be summable by Abel's method. If $p > 1$ and

$$\frac{1}{n} \sum_1^n k^p |a_k|^p \quad \text{is bounded,}$$

then $\sum_0^\infty a_k$ converges. This theorem does not hold for the limiting case $p = 1$, as it can be seen from Example 1, given below[3]). In the present paper it shall be proved that if

$$V_n = \frac{\sum_1^n k |a_k|}{n} \tag{1}$$

is not only bounded, but converges to a finite number V, then we can assure the convergence of the series $\sum_0^\infty a_k$. The following preliminary remark illustrates the difference between the qualitative and quantitative hypothesis concerning V_n: the boundedness of V_n does not imply $a_n \to 0$ (see e. g. Example 1) which holds evidently if V_n converges, since

$$|a_n| = V_n - V_{n-1} + \frac{V_{n-1}}{n}.$$

After having proved our theorem, we give three examples. From the

---

1) O. SZÁSZ, Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen, *Journal London Math. Soc.*, **3** (1928), pp. 254–262.

2) J. E. LITTLEWOOD, The converse of Abel's theorem on power series, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **9** (1911), pp. 434–448.

3) Another example can be obtained from the example given by L. NEDER, Über Taubersche Bedingungen, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **23** (1925), pp. 172–184, espacially p. 180.

second it can be seen that there exist series summable by Abel's means, to which the theorem of O. SZÁSZ can not be applied, while the conditions of our theorem are satisfied. The third example illustrates that the opposite case is also possible, viz. a series for which our theorem does not work, while that of O. SZÁSZ can be applied.

We prove the following

Theorem A. *If* $A(x)=\sum_0^\infty a_k x^k$ *is convergent for* $|x|<1$ *and* $\lim_{x\to 1-0} A(x)=s$ *exists, the series* $\sum_0^\infty a_k$ *converges to the sum* s, *provided that* V_n, *defined in* (1), *converges to a limit* V.

Proof. Write

$$S_n=a_0+a_1+\ldots+a_n. \tag{2}$$

We prove first that $|S_n|$ is bounded. This follows already from $A(x)$ and V_n being bounded. In fact, let us suppose

$$|A(x)|\leqq c_1, \qquad V_n\leqq c_2.$$

Evidently the ABEL sums of the sequence $t_n=n|a_n|$ have the same upper bound as the arithmetic means V_n, i. e.

$$(1-x)\sum_0^\infty k|a_k|x^k\leqq c_2, \qquad 0\leqq x<1.$$

From the identity

$$S_n=\sum_0^n a_k(1-x^k)-\sum_{n+1}^\infty a_k x^k+A(x),$$

combined with the inequality $1-x^k\leqq k(1-x)$, $0\leqq x<1$, it follows that

$$|S_n|\leqq(1-x)nc_2+\frac{c_2}{(1-x)n}+c_1.$$

Putting $x=1-\frac{1}{n}$ we get

$$|S_n|\leqq c_1+2c_2.$$

Now Karamata's following lemma[4]) will be required:

If the sequence S_n is bounded from below, $S_n\geqq -M$ $(M\geqq 0)$, and the function $f(t)$ is bounded and integrable in Riemann's sense over the interval $(0, 1)$, then

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_0^\infty S_k x^k=S$$

implies that

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_0^\infty S_k x^k f(x^k)=S\int_0^1 f(t)\,dt.$$

---

[4]) J. KARAMATA, Über die Hardy—Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Zeitschrift*, 32 (1930), pp. 319–320.

After having shown the boundedness of S_n, this lemma can be applied to the sequence S_n. It can also be applied to the sequence $t_n = n|a_n|$ which, by the suppositions made, evidently satisfies the conditions of Karamata's lemma. In both cases $f(t)$ shall be defined as follows:

$$f(t)=\frac{1}{t} \quad \text{for} \quad e^{-(1+\varrho)} \leqq t \leqq e^{-1}$$

and $f(t)=0$ in the remaining parts of the interval $(0, 1)$. In this definition ϱ is an arbitrary positive number. We shall denote the integral part of $n(1+\varrho)$ by n'. Using the relation

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)=1,$$

applying Karamata's lemma to the sequences S_n and t_n and choosing for $f(t)$ the function defined above, we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n}^{n'} S_k = S\varrho \tag{3}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n}^{n'} k|a_k| = V\varrho. \tag{4}$$

Further, it follows from (4), that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{n}^{n'} |a_k| \leqq V\varrho. \tag{5}$$

Let us consider the difference $S_n - S$. We have

$$|S_n - S| = \left|\frac{\sum_{n}^{n'}(S_n - S_k)}{n'-n} + \frac{\sum_{n}^{n'}(S_k - S)}{n'-n}\right| \leqq \frac{\sum_{n}^{n'}|S_n - S_k|}{n'-n} + \left|\frac{n}{n'-n}\,\frac{\sum_{n}^{n'} S_k}{n} - S\right|.$$

Since by (3) and because of $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n'-n}=\frac{1}{\varrho}$ the second member on the right tends to 0, it follows from (5) that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S_n - S| \leqq V\varrho.$$

ϱ being arbitrary it follows that

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

This proves Theorem A. We can state it in a slightly generalised form, which however is a simple consequence of its original form. Let σ_n^r denote the CESÀRO means of order r of the series $\sum_{0}^{\infty}|a_k|$. We have evidently $V_n = \sigma_n^0 - \sigma_n^1$. We prove the following

Theorem B. *If the series* $\sum_{0}^{\infty} a_k$ *is summable by Abel's method, and* $(\sigma_n^r - \sigma_n^{r+1})$ *tends to a limit* V_r, *then the series* $\sum_{0}^{\infty} a_k$ *is convergent.* (r is an integral number.)

Theorem B follows easily from Theorem A. In fact, let τ_n^r denote the CESÀRO means of order r of the sequence $t_k = k\,|a_k|$ (i. e. of the series $\sum_{1}^{\infty} [k|a_k| - (k-1)|a_{k-1}|]$). It can be easily verified that

$$\sigma_n^r - \sigma_n^{r+1} = \frac{\tau_n^{r+1}}{r+1} \tag{6}$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

But it is well known[5]) that if a positive sequence is summable by CESÀRO means of any order greater than 1, it is also summable by CESÀRO means of the first order, i. e. by arithmetic means. Thus the hypothesis that $\sigma_n^r - \sigma_n^{r+1}$ converges to a limit ensures also the convergence of V_n, and Theorem A can be applied.

The following examples may serve for illustrating the mutual relation of our Theorem A and the theorem of O. SZÁSZ mentioned above.

Example 1. There exist divergent series, summable by ABEL means, with V_n bounded. For instance the series:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= 1 \quad \text{if} \quad k = 2^n \\ a_k &= -1 \quad \text{if} \quad k = 2^n + 1 \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$a_k = 0 \quad \text{for every other value of the index } k.$$

Example 2. There exist series for which V_n converges, while $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} k^p |a_k|^p$ is unbounded for every value of p greater than 1. For instance the series:

$$a_k = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{if} \quad k = 2^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$a_k = 0 \qquad \text{for every other value of the index } k.$$

Example 3. There exist convergent series for which V_n does not converge, while

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} k^p |a_k|^p \tag{7}$$

is bounded, moreover convergent, for some $p > 1$. (In this connection it must be observed that according to the inequalities of SCHWARZ—

5) J. KARAMATA, loc. cit., p. 320.

HÖLDER, V_n is bounded provided that (7) is bounded with some $p > 1$. This is the reason why the following example is a little bit more intricate.) We define first the absolute values of the numbers a_k. Let us have

$$|a_k| = \frac{5}{k} \quad \text{if} \quad k = 1, 2, \ldots, n_1;$$

$$|a_k| = \frac{1}{k} \quad \text{if} \quad k = n_1 + (2m-1),\ m = 1, 2, \ldots, n_2;$$

$$|a_k| = \frac{7}{k} \quad \text{if} \quad k = n_1 + 2m,\ m = 1, 2, \ldots, n_2;$$

$$|a_k| = \frac{5}{k} \quad \text{if} \quad k = n_1 + 2n_2 + m,\ m = 1, 2, \ldots, n_3;$$

$$|a_k| = \frac{1}{k} \quad \text{if} \quad k = n_1 + 2n_2 + n_3 + (2m-1),\ m = 1, 2, \ldots, n_4;$$

$$|a_k| = \frac{7}{k} \quad \text{if} \quad k = n_1 + 2n_2 + n_3 + 2m,\ m = 1, 2, \ldots, n_4;$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

The sequence of integers $n_1, n_2, n_3, \ldots$ can be chosen so as to cause V_n to oscillate between 4 and 5. After having chosen the numbers $n_1, n_2, n_3, \ldots$ in that way, the signs of the numbers a_k can be fixed so as to render convergent the series $\sum_0^\infty a_k$. The choice of the numbers 1, 7, 5, serves to ensure the convergence of

$$\frac{1}{n} \sum_1^n k^2 |a_k|^2$$

which tends to 5^2 in view of $\frac{1}{2}(1^2 + 7^2) = 5^2$.

(Received March 20, 1945.)

Bibliographie.

R. Courant — D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, zweiter Band (Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 48), XVI + 549 S. mit 57 Abbildungen, Berlin, J. Springer, 1937.

Dieser zweite Band enthält in sieben Kapiteln eine systematische Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Hat sich der eigentliche Verfasser, COURANT auch auf die bezüglich der Physik wichtigen Gesichtspunkte beschränkt, Vollständigkeit konnte er auf diesem Riesengebiet noch immer nicht erstreben. So hat er vorzugsweise Gegenstände diskutiert, bei welchen er in der Sache oder in der Form der Darstellung beitragen konnte.

Dies gilt besonders vom letzten, an den ersten Band anschließenden Kapitel, in welchem COURANT die Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme selbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderliehen auf Grund der Hilbertschen direkten Methoden der Variationsrechnung behandelt. Und zwar in Weiterführung seiner früheren Arbeiten, die neueren Untersuchungen von FRIEDRICHS und RELLICH über lineare Operatoren im Hilbertschen Raume berücksichtigend. Dieses Kapitel enthält auch die Courantsche Lösung des Plateauschen Problems über die Existenz von Minimalflächen bei einfachster Randkurve.

Auf die übrigen originellen Beiträge kann in der folgenden Aufzählung nur stellenweise hingewiesen werden.

Nach einem vorbereitenden, die Grundbegriffe bis zum Cauchy—Kowalewskaschen Existenzsatz analytischer Lösungen analytischer Differentialgleichungen enthaltenden Kapitel, bringt Kapitel II die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im klassischen Umfang. Sehr eingehend wird die Hamilton—Jacobische Theorie, ihr Zusammenhang mit der klassischen Variationsrechnung und den kanonischen Transformationen dargestellt.

Kapitel III gibt zunächst die Klasseneinteilung linearer (und quasilinearer) Differentialgleichungen und — was hervorgehoben werden mag — linearer Systeme erster Ordnung. Dann wird die Struktur der Lösungen, ihre Zusammensetzung aus einzelnen Elementarvorgängen untersucht und an einigen Anfangswert- und Ausstrahlungsproblemen bzw. Ausbreitungsvorgängen beleuchtet. Hier findet sich eine breite Besprechung der typischen Differentialgleichungsprobleme der Physik, sowie — im Anhang — eine eingehende Diskussion der Ausgleichsprobleme und zwar sowohl mit Hilfe einer Integraldarstellung, als auch einer rein symbolischen (Heavisideschen) und durch die Laplace-Transformation begründeten Operatorenmethode.

Kapitel IV enthält fast ausschließlich eine Darstellung der an die Laplacesche bzw. Poissonsche Gleichung sich anschließenden Potentialtheorie, aus welcher eine neue, wesentliche Verallgemeinerung der Umkehrung des Mittelwertsatzes hervorgehoben werden kann.

Wesentlich eingehender werden im V. und VI. Kapitel die Schwingungen und Ausbreitungsvorgänge umfassenden hyperbolischen Gleichungen behandelt. Im V. solche mit zwei, im VI. jene mit mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Kapitel V beleuchtet erneuert den Charakteristikenbegriff von verschiedenen Seiten, gibt dann Grundsätzliches über Ausbreitungsvorgänge, um die linearen Differentialgleichungen mit der Riemannschen, jene von der Gestalt $u_{xy}=f(x, y, u, u_x, u_y)$ bzw. die entsprechenden Systeme mit der Picardschen Methode und schließlich die allgemeinen nach H. Lewys und K. Friedrichs' neuesten Ausführungen zu behandeln bzw. die Analytizität der Lösungen von elliptischen Gleichungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen zu beweisen.

Besonders reichhaltig ist das — mehr als ein Fünftel des Bandes bildende — VI. Kapitel. Eine entsprechend erweiterte Charakteristikentheorie gibt hier zunächst die Grundlage zu einer mathematisch haltbaren Darstellung und mit Beispielen reich belegten Besprechung physikalischer Begriffsbildungen, wie jene der Wellenfronten, der Ausbreitung, der Strahlen, des Eikonals, des Huygensschen Prinzips bzw. Konstruktion von Wellenfronten. Dann folgen die Sätze über Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet bei Anfangsproblemen so, wie sie sich nach Zarembas ursprünglichen und neulich von Rubinovicz, Friedrichs und H. Lewy erweiterten Methode auf mehr als zwei unabhängige Veränderliche übertragen lassen. Wird nun bei der expliziten Lösung des Anfangswertproblems hyperbolischer linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, sowie bei der Behandlung der Wellen- und Darbouxschen Gleichung mit der Mittelwertmethode, wie endlich bei der Lösung ultrahyperbolischer Differentialgleichungen und allgemeiner Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch einen neuen Mittelwertsatz von Asgeirsson die Charakteristikentheorie zurückgestellt, so kommt sie bei der — vereinfacht und besonders klar dargestellten — Hadamardschen Methode als Vertiefung und Verallgemeinerung der in Kapitel V behandelten Riemannschen wieder zur vollen Geltung.

Reiche Literaturnachweise am Schluß der einzelnen Kapitel bestärken den Eindruck, daß in dem — nun abgeschlossenen — Werke nicht ein abgeklärtes Lehrbuch eines erstarrten Wissensgebietes, sondern ein besonders wertvoller, anregend lebendiger Wegweiser innerhalb eines unerschöpflichen, immer neue Schätze darbietenden Forschungsgebietes vorliegt. Würdig den Verfassern, denen als Meister bzw. Schüler Idee und Gestaltung zu verdanken sind.

T. v. Szentmártony (Stachó).

Charles N. Moore, Summable series and convergence factors (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXII), VI + 105 pages, New York, American Mathematical Society, 1938.

All methods for summing a divergent series $\sum u_n$ which have come into general use are essentially "convergence factor" methods, that is, the sum is defined as

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} [u_0 f_0(\alpha) + u_1 f_1(\alpha) + \ldots],$$

the "convergence factors" $f_0(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, ... satisfying to appropriate conditions. Convergence factors $f_n(\alpha)$, which transform convergent series into convergent ones are designated as factors of type I; factors that may be used to obtain the sum of a series are of type II.

The aim of the present work is to give a systematic treatment of convergence factor theorems. Both types of convergence factors are considered, and the theory is developed for multiple series of any order as well as for simply infinite series. Through the use of Nörlund means in place of Cesàro means, the theory developed is considerably more general than that found in the existing literature.

At the end of the book there is a bibliography including 165 papers on this subject.

Béla de Sz. Nagy.

Francis Perrin, Mécanique statistique quantique, 224 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1939.

Le présent livre est une contribution importante à la mécanique statistique quantique. Il se compose de trois parties. La première s'occupe des problèmes de la mécanique continue aléatoire, savoir de la probabilité en mécanique classique, des systèmes ergodiques, des systèmes couplés avec un thermostat, des gaz parfaits et pour terminer, de la théorie ondulatoire continue du rayonnement isotherme.

La deuxième partie analyse la quantification des systèmes mécaniques, la mécanique ondulatoire, la statistique classique des systèmes quantifiés, la quantification des ondes lumineuses, la formule de Planck et enfin la chaleur spécifique des solides.

La troisième partie, la plus importante du livre, est consacrée à la statistique quantique des systèmes indiscernables. L'auteur donne un exposé clair et détaillé des statistiques diverses: classique, de Bose-Einstein, de Fermi-Dirac, de Léon Brillouin et de Planck-Allard. Il montre qu'on peut trouver dans la théorie statistique des éléments ayant les caractères des grandeurs thermodinamiques: température, chaleur et entropie. Les deux premiers principes de la thermodynamique résultent de la seule hypothèse de la constitution corpusculaire de la matière; le principe de Nernst est essentiellement lié au caractère quantique des lois qui régissent les particules élémentaires.

Pour mettre en évidence les caractères essentiels des gaz matériels régis par les nouvelles statistiques, des gaz matériels simples sont étudiés. L'auteur montre combien respectivement la faible et la forte dégénérescence modifient le comportement du gaz dans les statistiques de Bose et Fermi. Il examine ensuite le cas où le gaz est soumis à un champ extérieur. Il étudie le paramagnétisme d'un gaz électronique et l'atome de Thomas-Fermi. Il étudie ensuite la cinétique statistique des particules discernables et indiscernables, l'équilibre thermique et l'évolution d'un état quelconque. Il démontre que l'entropie d'un gaz qui evolue en restant isolé à partir d'un état quelconque croît sans cesse et tend vers le maximum qui correspond à l'état d'équilibre.

L'auteur fait très bien de baser la discussion des statistiques quantiques sur la mécanique ondulatoire et cela en soulignant leur relation étroite à la dualité „onde — corpuscule".

Nous félicitons l'auteur sur cette excellente introduction à l'étude de la mécanique statistique quantique dont on ne saurait trop conseiller la lecture à tous ceux qui s'intéressent aux méthodes et aux résultats de la mécanique moderne.

Coloman Széll.

Louis de Broglie, La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, 223 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1939.

Dans le présent volume, le savant auteur expose la théorie en question, en commençant par le cas général des ensembles de corpuscules en interaction et en dérivant comme cas particulier le cas d'un seul corpuscule.

Voici le programme du livre:

Après avoir rappelé les résultats de la mécanique classique qui servent de base de celle ondulatoire, on fait le passage à celle-ci et l'on développe les principes généraux de la mécanique ondulatoire des systèmes, en particulier les différentes lois de conservation.

Tel est le sujet des 3 premiers chapitres. Le quatrième est consacré à la théorie du centre de gravité en mécanique ondulatoire, théorie à peine effleurée dans la plupart des ouvrages.

Chapitre V s'occupe à titre d'exemple de quelques problèmes particuliers.

Chapitre VI donne un aperçu sur les méthodes de perturbation qui jouent un grand rôle dans notre théorie.

Dans les trois derniers chapitres l'auteur étudie les systèmes contenants des particules de même nature physique. Pour étudier ces systèmes, la mécanique ondulatoire a été amenée à introduire le principe d'exclusion de PAULI. L'auteur y traite deux cas suivant que les particules sont dénuées de spin ou non. Dans le dernier chapitre il est question entre autres des noyaux des atomes.

En résumé, le présent livre expose très clairement les problèmes de la mécanique ondulatoire et sert d'excellente introduction.

Coloman Széll.

Béla v. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 5), IV + 80 S., Berlin, J. Springer, 1942.

Das vorliegende Heft beschränkt sich keineswegs auf das im Titel genannte zentrale Problem, sondern gibt eine bis auf Einzelheiten ausgeführte, gründliche, leicht lesbare Darstellung der Hauptprobleme der Theorie des Hilbertschen Raumes; was fehlt, sind sozusagen nur die Vorgeschichte und die Anwendungen. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung auf 80 Seiten ist der in den beiden letzten Jahrzehnten erfolgten Axiomatisierung und der im Anschluß hieran ins Werk gesetzten Vereinfachung der Methoden zu verdanken, an der auch der Verfasser regen Anteil hat. So z. B. stammt von ihm der auf die Verunendlichfachung des H. Raumes gegründete Beweis, daß man aus jeder beschränkten Menge linearer Transformationen des (separablen) H. Raumes eine überall dichte Teilfolge auswählen kann, ferner vereinfachte Beweise des Neumannschen Satzes über Funktionen einer selbstadjungierten oder normalen Transformation, der Stoneschen und verwandten Sätze über Gruppen und Halbgruppen von Transformationen, sowie Vereinfachung der Störungstheorie.

F. R.

La rédaction fait part de la triste nouvelle du décès, le 27 mai 1946, dans sa 48e année, de son membre

BÉLA de KERÉKJÁRTÓ,

professeur de géométrie supérieure à l'Université de Budapest, ancien professeur de l'Université de Szeged. Il a succombé à une maladie pernicieuse aggravée par la misère de ces dernières années.

L'amitié, le souvenir de sa personnalité attrayante et la profondeur de son oeuvre mathématique nous feront garder sa mémoire.

Désirant de renouveler les *liens* interrompus par les événements tristes des dernières années, la redaction prie nos anciens collaborateurs at abonnés ainsi que les institutions scientifiques et les périodiques avec lesquelles nous étions en relations d'échange de vouloir bien nous indiquer leurs adresses actuelles et le dernier fascicule reçu.

Prix d'abonnement du volume courant (à 256 pages au moins): 4 dollars (U. S. A.), ou des ouvrages mathématiques du même prix, parus pendant la guerre.

Nous signalons et autant que possible nous analysons les *ouvrages envoyés* par MM. les auteurs et les éditeurs.

Adresse postale: Acta Scientiarum Mathematicarum, Institut Bolyai de l'Université, 2, Baross-u., Szeged, Hongrie.

The Editors are desirous to re-establish their former *relations abroad*, interrupted by the sorrowful events of these last years. They invite their former contributors, subscribers, scientific institutions as well as the Editorial Boards of periodicals with which they have had connections before the war to let them know their present addresses and the last number which has reached them.

Subscription price for the current volume (of 256 pages at least): 4 U. S. A.-dollars, or mathematical works of the same price, edited during the war.

Books sent on for review by author or publisher are announced and as far as possible discussed..

Postal address: Acta Scientiarum Mathematicarum, The Bolyai Institute of the University, 2 Baross-u., Szeged, Hungary.

Die Schriftleitung ist bestrebt, unsere infolge der bedauerlichen Ereignisse der letzten Jahre zerrissenen *Beziehungen* wieder aufzunehmen. Wir bitten daher unsere früheren Mitarbeiter, Abonnenten, sowie die wissenschaftlichen Institute und Zeitschriften, die mit uns in Tauschbeziehung waren, ihre gegenwärtigen Anschriften und die Nummer des letzten erhaltenen Heftes uns mitteilen zu wollen.

Bezugspreis des laufenden Bandes (wenigstens 256 Seiten): 4 U. S. A.-Dollars oder während des Krieges erschienene mathematische Werke vom selben Preis.

Die von Verfassern oder Verlegern *eingesandten Werke* werden angezeigt und tunlichst besprochen.

Postanschrift: Acta Scientiarum Mathematicarum, Bolyai-Institut der Universität, Szeged, Ungarn, Baross-u. 2.

INDEX — TARTALOM.

PRINTED IN HUNGARY

SZEGED VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R.-T. 44—2089
Felelős nyomdavezető: Kiss István